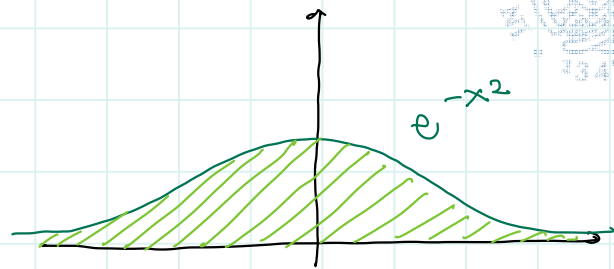


INTEGRALE GAUSSIANO

Calcolare $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$



Indichiamo con I il valore dell'integrale.

Consideriamo l'integrale doppio improprio (per colpa della sola zona di integrazione)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Proviamo a calcolarlo in due modi.

1° modo: coordinate cartesiane

$$= e^{-x^2} \cdot e^{-y^2}$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \boxed{e^{-(x^2+y^2)}} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx}_I \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy}_I \\ &= I^2 \end{aligned}$$

2° modo: coord. polari

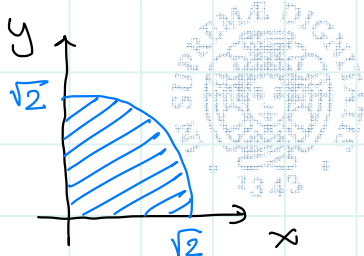
$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta e^{-p^2} \cdot p \quad \swarrow J \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} p e^{-p^2} dp \\ &= \pi \left[-e^{-p^2} \right]_0^{+\infty} = \pi \end{aligned}$$

Cambiato da $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ e poi
mandare $R \rightarrow +\infty$

Ne segue che $I^2 = \pi$, cioè $I = \sqrt{\pi}$.

Esempio 1 $\iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy$

dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 2\}$



L'integrale è improprio perché $f(x,y)$ non è limitata in un intorno dell'origine (considero $f(t,t)$ e mando $t \rightarrow 0^+$)

Brutal mode $f(x,y) \sim \frac{\rho}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}$ e quindi converge perché esponente < 2 .

Formalmente, passiamo in coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{x}{x^2+y^2} dx dy &= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho \cos \theta}{\rho^2} \cdot \rho \\ &= \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} d\rho}_{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta}_1 = \sqrt{2}, \text{ quindi converge} \end{aligned}$$

Esempio 2 $\iint_A \frac{1}{x+y} dx dy$ con A come prima

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho}$, quindi dovrebbe convergere.

Formalmente, in coord. polari diventa

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{1}{\rho(\cos \theta + \sin \theta)} \cdot \rho &= \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Adesso possiamo procedere in 2 modi, sostanzialmente equivalenti.

1° modo Osservare che l'integrale in $d\theta$ è un integrale PROPRIO, quindi viene un numero

Perché è un integrale proprio? Per il solito discorso di inizio corso: la funzione $g(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ ammette minimo per Weierstrass nell'intervallo $[0, \pi/2]$. Questo min. è il valore in un certo θ_0 e non può essere nullo perché $\sin\theta_0 \geq 0$ e $\cos\theta_0 \geq 0$, ma non possono essere contemporaneamente nulli.

[Volevo in questo caso il minimo si calcola pure :)]

2° modo Con il solito discorso si ottiene che

$$\cos\theta + \sin\theta \geq m > 0 \quad \forall \theta \in [0, \pi/2]$$

e quindi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{m} d\theta = \frac{1}{m} \frac{\pi}{2}$$

↑
denom. più piccolo.

Esempio 3 $\iint_A \frac{xy}{x^4 + y^4} dx dy$ con lo stesso A di prima

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{1}{\rho^2}$, quindi DIVERGE (perché esponente 2 è il primo che va male)

In coord. polari diventa

$$\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\rho^2 \cos\theta \sin\theta}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \rho = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho} d\rho \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{\cos\theta \sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}_{\varphi(\theta)} d\theta$$

Come prima osserviamo che

$$\int_0^{\pi/2} \varphi(\theta) d\theta = c_0 > 0$$

(si tratta di un integrale proprio per il solito discorso
denom $\geq m > 0$)

$$= c_0 \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{\rho} d\rho}_{= +\infty \text{ per Analisi 1}}$$

Esempio 4 $\iint_A \frac{\arctan(xy)}{x^4+y^4} dx dy$ con lo stesso A di sempre

Brutal mode: $f(x,y) \sim \frac{xy}{x^4+y^4} \sim \frac{1}{\rho^2}$ ed è come prima.

Quando passiamo in coord. polari troviamo

$$\int_0^{\sqrt{2}} \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta)}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \rho$$

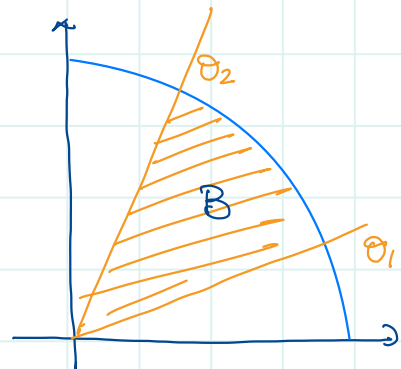
Problema: non è che posso semplificare i ρ !!!

Seconda idea: provo a scrivere $f(x,y) \geq$ qualcosa, sperando che l'integrale di qualcosa diverga a $+\infty$
Ora il numeratore si annulla sugli assi, quindi la ricerca del qualcosa non è ovvia

Terza idea: restringo la zona di integrazione in modo da restare lontani dagli assi

Fisso $0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ e considero la zona

$B: 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. Ora



$$\iint_A f(x,y) dx dy \geq \underbrace{\iint_B f(x,y) dx dy}_{\text{spero che diverga}}$$

Ora in B vale che $\sin\theta \cdot \cos\theta \geq m > 0$ per il solito motivo quindi

$$\frac{\arctan(\rho^2 \cos\theta \sin\theta)}{\rho^4 (\cos^4\theta + \sin^4\theta)} \cdot \rho \geq \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3}$$

num. + piccolo
denom. + grande

A questo punto è fatta perché

$$\iint_B \frac{\arctan(\dots)}{\dots} \geq \int_0^{\sqrt{2}} dp \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3}$$

$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\arctan(m\rho^2)}{2\rho^3} d\rho$$

Diverge in quanto per $\rho \rightarrow 0$ si comporta come $\frac{m\rho^2}{2\rho^3} \sim \frac{m}{2} \frac{1}{\rho}$

Fatto generale: non solo si possono stimare gli integrali facendo disuguaglianze tra funzioni, ma anche considerando insiemi più grandi o più piccoli.

— 0 — 0 —