



INTEGRALI IMPROPRI IN PIÙ VARIABILI

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz$$

INT. PROPRIO

- insieme A (zona di integr.) limitato
- funzione f (integrand) limitata

INT. IMPROPRIO

Se manca uno (o entrambi) degli ingredienti precedenti

Analisi 1

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

↑
improprio perché
 $\frac{1}{x}$ non è limitata
in $(0, 1)$

$$\int_7^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑
improprio
per colpa della
zona di integr.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

↑
improprio per 2 motivi
→ zona illimitata
→ $\frac{1}{x}$ non limitata

Analisi 2

$$\iint_A \frac{1}{x^4 + y^4} dx dy$$

- Se $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ allora è improprio perché la funzione non è limitata in un intorno dell'origine (si dice che l'integrand ha problemi in $(0, 0)$ e questo è l'unico pbm. dell'integrale)
- Se $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ allora l'integrand non ha problemi, e l'integrale è improprio per colpa della zona di integrazione non limitata (l'integrale ha un unico pbm. all'infinito)
- Se $A = \mathbb{R}^2$ oppure $A =$ primo quadrante, allora i pbm. ci sono entrambi (l'integrale ha 2 problemi)

Come si definisce un integrale improprio?



Analisi 1

$$\int_{\tau}^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\tau}^A \frac{1}{x} dx$$

(solo pbm. all'infinito)

$$\int_0^{\tau} \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^{\tau} \frac{1}{x} dx$$

(solo pbm. in $x=0$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \int_0^{\tau} \frac{1}{x} dx + \int_{\tau}^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

e si studiano separatamente i due integrali con un pbm. solo

il p.to di spezzamento
NON è importante

Analisi 2

Supponiamo intanto $f \geq 0$ nella zona di integrazione.

Supponiamo che l'integrale abbia un problema solo (altrimenti si spezza in un numero opportuno di parti). Poi si procede in modo diverso a seconda del problema.

Esempio 1

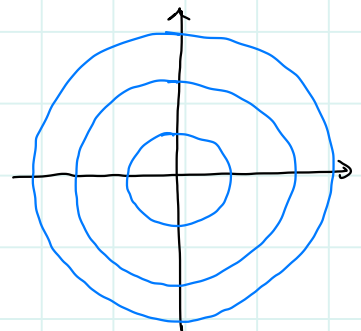
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x^2+y^2+5} dx dy$$

$f(x,y) \geq 0$

(unico pbm. a $+\infty$)

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{B(0,R)} \frac{1}{x^2+y^2+5} dx dy$$

↑
palla con centro in $(0,0)$ e raggio R



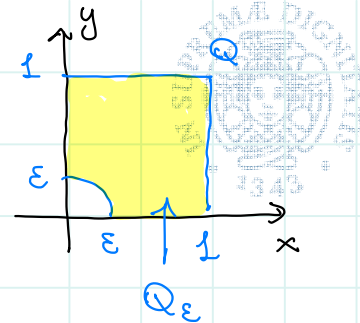
In alternativa posso usare i quadrati $Q_R := [-R, R]^2$

$$= \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{Q_R} \frac{1}{x^2+y^2+5} dx dy = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R dx \int_{-R}^R dy \frac{1}{x^2+y^2+5}$$

In entrambi i casi sto facendo il limite di una funzione di R crescente, dunque il limite può fare $L \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$

Esempio 2 $Q = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\iint_Q \frac{1}{x^2+y^2} dx dy \quad (\text{unico p.b. in } (0,0))$$



$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\iint_{Q_\varepsilon} \frac{1}{x^2+y^2} dx dy}_{a \text{ è fisso è un integrale proprio}}$$

In questo caso sto facendo il limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ di una funzione decrescente di ε , quindi ancora una volta è $L \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$.

Oss. Anche in questo caso potrei usare "buchi quadrati" o "triangolari" e non cambia nulla.

Se $f \leq 0$ nella zona di integrazione, allora è tutto uguale (si può pensare di "portare fuori un segno -" e si ricade nel caso $f \geq 0$).

Se f ha segno variabile, allora si pone

$$A_+ := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq 0\}$$

$$A_- := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 0\}$$

Poi si studiano separatamente i due integrali

$$\iint_{A_+} f(x,y) dx dy$$

$$\iint_{A_-} f(x,y) dx dy$$

e poi si traggono le conseguenze. Se il primo fa $+\infty$ ed il secondo fa $-\infty$, per CONVENZIONE si dice che l'integrale su A è **INDETERMINATO**.

Oss. Un integrale improprio ha 4 possibilità

$l \in \mathbb{R}$ $\pm \infty$ indeterminato.

Se $f \geq 0$, allora restano solo $l \in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$
necessariamente $l \geq 0$

Studiare la convergenza di un integrale improprio = capire in quale caso ci troviamo.

Analisi 1 Ricordiamo i seguenti integrali fondamentali

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \rightarrow \text{converge se } a < 1 \\ \rightarrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{caso con} \\ \text{pbm. in } x \rightarrow \infty \end{array} \right\}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a} dx = \begin{cases} \rightarrow \text{converge se } a > 1 \\ \rightarrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \leq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{caso con} \\ \text{pbm. all'infinito} \end{array} \right\}$$

Gli $\pm$ negli estremi possono un qualunque numero > 0 .

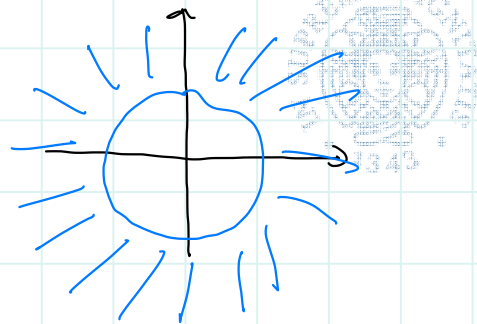
Esempio 1 $\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy$

$$= \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{\rho^a} \cdot \underset{\int_0^{2\pi}}{\rho} = \int_0^1 \rho d\rho \frac{1}{\rho^{a-1}} \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\rho^{a-1}}$$

Questo è un integrale con pbm. in $\rho=0$, che converge se e solo se $a-1 < 1$, cioè se e solo se $a < 2$

$$\iint_{B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy = \begin{cases} \rightarrow \text{converge se } a < 2 \\ \rightarrow \text{diverge a } +\infty \text{ se } a \geq 2 \end{cases}$$

Esempio 2



$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy$$

converge se $a > 2$
diverge a $+\infty$ se $a \leq 2$

$$= \int_1^{+\infty} dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^a} \cdot p = 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

converge $\Leftrightarrow a-1 > 1 \Leftrightarrow a > 2$

Formalmente nel 2° caso avrei dovuto integrare sui curve circolari che escludono l'origine

$$\iint_{B_\varepsilon} \frac{1}{(\sqrt{x^2+y^2})^a} dx dy$$

$$= \int_\varepsilon^1 dp \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^{a-1}}$$

$$= 2\pi \int_\varepsilon^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

e quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ diventa proprio

$$2\pi \int_0^1 \frac{1}{p^{a-1}} dp$$

— 0 — 0 —

