



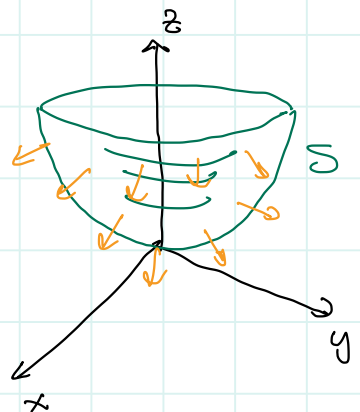
QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN INTEGRALE DI FLUSSO

Dati $\rightarrow$ una superficie S
 $\rightarrow$ una orientazione di S
 $\rightarrow$ un campo di vettori $\vec{E}$

Obiettivo: calcolare

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Esempio $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2 \leq 1\}$
 $\vec{n}$ = verso il basso (si può dire
 che in $(0,0,0)$ viene $\vec{n} = (0,0,-1)$)
 $\vec{E} = (y^2, y-z, xy-z)$



ROAD MAP 1

Uso la definizione

- $\rightarrow$ parametrizzo S con $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$
- $\rightarrow$ controllo che $\vec{n}$ venga quello giusto (altrimenti cambio segno)
- $\rightarrow$ calcolo

$$\iint_{\Omega} (AM_1 + BM_2 + CM_3) du dv$$

Nel nostro caso $\Phi(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$ con $\Omega =$ cerchio unitario

* * *

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2u \end{matrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2v \end{matrix}$$

Per $(u, v) = (0, 0)$ trovo $\Phi(u, v) = (0, 0, 0)$ e (M_1, M_2, M_3) viene quello sbagliato, quindi basta cambiare segno

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{\Omega} \{ \overset{A}{v^2} \overset{M_1}{(-2u)} + \overset{B}{(v-u^2-v^2)} \overset{M_2}{(-2v)} + \overset{C}{(uv-u^2-v^2)} \overset{M_3}{1} \} du dv$$

cambio di segno richiesto

Questo si calcola in coord. polari $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$
 $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

... si fa ...

[Commenti: funziona sempre, ma bisogna essere capaci di parametrizzare la superficie]

ROAD MAP 2

Stokes con inversione del rotore

- Spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
- Calcolo $\vec{F}$ invertendo il rotore
- Uso Stokes riducendomi alla circuitazione di $\vec{F}$ lungo ∂S

Nel nostro caso $\vec{E} = (y^2, y-z, xy-z)$, quindi $\text{div } \vec{E} = 0$
 Essendo definito su $\mathbb{R}^3$, posso invertire il rotore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$C_y - B_z = y^2$$

$$A_z - C_x = y - z$$

$$B_x - A_y = xy - z$$

Questa volta scegliamo $B = 0$

$$C_y = y^2$$

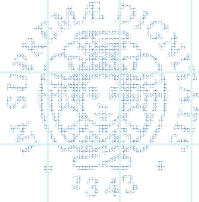
$$A_z - C_x = y - z$$

$$-A_y = xy - z$$

Ricavo A e C:

$$C = \frac{1}{3} y^3 + \varphi(x, z)$$

$$A = -\frac{1}{2} x y^2 + y z + \varphi(x, z)$$



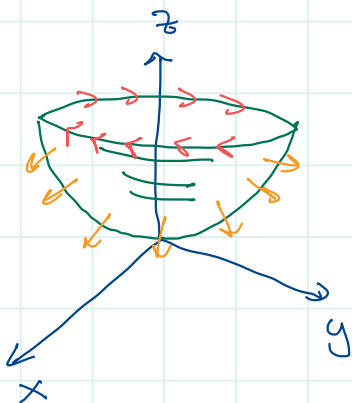
Scelgo di porre $\varphi = 0$, quindi

$$C = \frac{1}{3} y^3 + \varphi(x, z)$$

$$A = -\frac{1}{2} x y^2 + y z$$

$$A_z - C_x = \cancel{y} - \varphi_x = \cancel{y} - z \quad (\text{Buon segno che } y \text{ se ne vada})$$

$\varphi(x, z) = xz$ da cui



$$A = -\frac{1}{2} x y^2 + y z$$

$$B = 0$$

$$C = \frac{1}{3} y^3 + x z$$

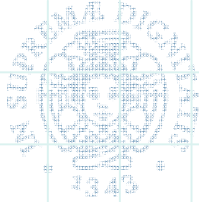
Sarebbe opportuno dedicare 30 sec. alla verifica che il rot di questo $\vec{F}$ sia proprio $\vec{E}$

Parametizziamo $\partial S = (\cos t, \sin t, 1)$ con $t \in [0, 2\pi]$ invertendo il verso !!

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{\partial S} \left(-\frac{1}{2} x y^2 + y z \right) dx + \left(\frac{1}{3} y^3 + x z \right) \underset{0}{dz}$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos t \sin^2 t + \sin t \right) (-\sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2} \sin^3 t \cos t + \sin^2 t dt = \text{si fa facile}$$



→ Spero che $\text{div } \vec{E} = 0$

→ sostituisco S con un'altra superficie che abbia lo stesso bordo con la stessa orientazione

→ calcolo il flusso su quest'altra superficie!

Nel vostro caso uso come S_1 il tappo sopra.

ORIENTATO COME?

Devo orientarlo verso il basso, cioè con

$$\vec{n} = (0, 0, -1)$$

Ora

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑
normale a S_1 , cioè $(0, 0, -1)$

Ora $S_1 = (x, y, 1)$ con $x^2 + y^2 \leq 1$, quindi

$$\begin{aligned} \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \underbrace{(xy-1)}_{xy-z} \underbrace{(-1)}_{3^{\text{a comp. dim}}} dx dy \\ &= \underbrace{\iint_{x^2+y^2 \leq 1} -xy dx dy}_0 + \text{Area} = -\pi \quad \because \end{aligned}$$

Cosa c'è sotto? Sia $\vec{F}$ tale che $\text{rot } \vec{F} = \vec{E}$. Allora

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_S \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{F}, \vec{e} \rangle ds$$

$$= \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{e} \rangle ds = \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$



- Aggiungo ad S dei "tappi" in modo che venga il bordo di un certo solido V
- Applico teo. div. in V

Nel nostro caso aggiungo S_1 come prima

Ora

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \quad (1)$$

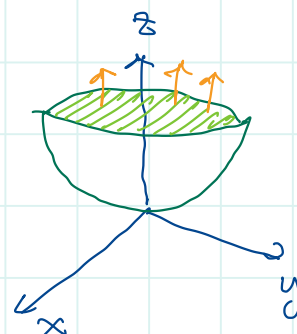
$$= \int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma + \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
la normale destra
era quella esterna

(2)

↑
la normale è $(0,0,1)$

(3)



(1) = 0 perché $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (ma si poteva calcolare anche se $\operatorname{div} \neq 0$)

(2) è quello che cerciamo, dunque

$$(2) = - \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

↑
con normale $(0,0,1)$

che alla fine è quello di prima!

— 0 — 0 —