

INVERSIONE DEL ROTORE

Problema: dato un campo di vettori $\vec{E}$ trovare, posto che esista, un campo di vettori $\vec{F}$ tale che

$$\vec{E} = \text{rot}(\vec{F})$$

Condizione necessaria è che $\text{div} \vec{E} = 0$ (cioè se $\text{div} \vec{E} \neq 0$, allora $\vec{F}$ di sicuro non esiste)

La cond. nec. diventa suff. se l'insieme di definizione è fatto bene, ad esempio tutto $\mathbb{R}^3$, oppure un insieme connesso o stellato (semp. con. NON basta).

In tal caso, come trovo $\vec{F}$?

Esempio $\vec{E} = (x+yz^2, y-z, -2z+\sin y)$

Si vede che $\text{div} \vec{E} = 0$ ed è definito su tutto $\mathbb{R}^3$.

Quindi F esiste!

Posto $\vec{F} = (A, B, C)$

* * *

$\partial_x \quad \partial_y \quad \partial_z$

A B C

$$\text{rot}(\vec{F}) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

Dobbiamo quindi risolvere

$$C_y - B_z = x + yz^2$$

$$A_z - C_x = y - z$$

$$B_x - A_y = -2z + \sin y$$

Posso porre uguale a 0 una a scelta delle 3 componenti, ad esempio $C \equiv 0$. Il sistema diventa

$$-B_z = x + y^2$$

$$A_z = y - z$$

$$B_x - A_y = -2z + \sin y$$

$$B = -xz - y^2z + \boxed{\varphi(x, y)}$$

$$\leadsto A = yz - \frac{1}{2}z^2 + \boxed{\psi(x, y)}$$

↑
scompare quando
derivo rispetto a z

Posso porre uguale a 0 una a scelta tra φ e ψ , ad esempio φ .

Abbiamo

$$B = -xz - y^2z$$

$$A = yz - \frac{1}{2}z^2 + \psi(x, y)$$

Sostituisco nella terza equazione:

$$(-xz - y^2z)_x - (yz - \frac{1}{2}z^2 + \psi(x, y))_y = -2z + \sin y$$

$$\cancel{-z} - \cancel{y^2z} - \psi_y = \cancel{-2z} + \sin y$$

$$\leadsto \psi_y = -\sin y$$

$$\leadsto \psi = \cos y.$$

DEVE SUCCEDERE che se
ne vanno tutte le z, come
conseguenza di $\text{div } \vec{E} = 0$

Quindi una possibile soluzione è

$$(yz - \frac{1}{2}z^2 + \cos y, -xz - y^2z, 0) = \vec{F}$$

[Costa 30 sec. verificare che il $\text{rot } \vec{F}$ sia davvero $\vec{E}$]

Esercizio Possiamo fare in modo che la terza componente di $\vec{F}$
sia x^2yz ?

Certo, basta ricordare che possiamo aggiungere ad $\vec{F}$ un
gradiente qualunque ed il rotore non cambia ($\text{rot } \nabla g = 0$).

Scelgo g t.c. $g_z = x^2 y z$, ad esempio

$$g(x, y, z) = \frac{1}{2} x^2 y z^2$$

Quindi un'altra soluzione è

$$\vec{F}_1 = \vec{F} + (x y z^2, \frac{1}{2} x^2 z^2, x^2 y z) \quad [\text{Fare la verifica per credere!}]$$

— o — o —

Esempio 1 S = solita semisfera

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\}$$

Orientazione uscente rispetto al centro

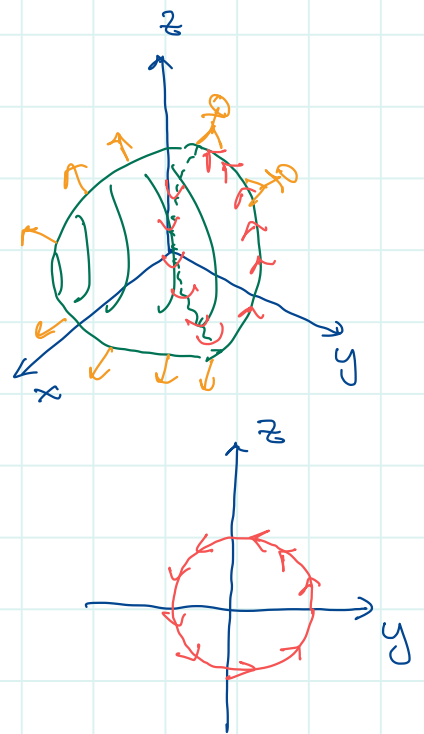
$$\vec{E} = (x + y, y^2, zx)$$

Calcolare $\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

1° modo Calcolo il rotore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\text{rot } \vec{E} = (0, -z, -1)$$

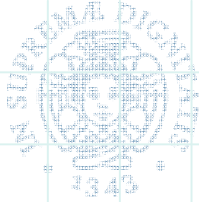


Ora parametrizzo la superficie, ad esempio con le coord. sferiche classiche

$$(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi)$$

$$\underbrace{-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}}_{\text{condizione } x \geq 0}$$

Calcolo M_1, M_2, M_3 (fatto + volte in les. precedenti) e controllo che induca orientazione corretta (e lo fa)



Concludo calcolando l'integrale

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (A M_1 + B M_2 + C M_3)$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 0 $-\sin \varphi$ -1

dove A, B, C sono le componenti del rotore

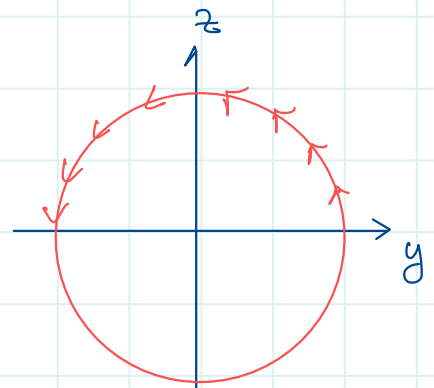
2° modo Uso Stokes

$$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle dS = \int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

componenti di $\vec{E}$
 $\nwarrow$ $\downarrow$ $\nearrow$
 $\uparrow$ curva che percorre ∂S nel verso giusto.

Una parametrizz. del bordo è

$$\gamma(\theta) = (0, \cos \theta, \sin \theta) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$



$$\int_{\partial S} A dx + B dy + C dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (x(\theta) + y(\theta)) \underbrace{\dot{x}(\theta)}_0 + y(\theta)^2 \underbrace{\dot{y}(\theta)}_0 + z(\theta) \underbrace{x(\theta)}_0 \dot{z}(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta (-\sin \theta) d\theta = \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$$

Esempio 4 bis Come sopra, ma con

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Stesso $\vec{E}$ e stessa $\vec{n}$ di prima.

Ora S è $\frac{1}{4}$ di sfera.

L'unica cosa da capire è come è fatto, e soprattutto ORIENTATO, ∂S

Il bordo è fatto da 2 curve

$$\gamma_1(t) = (0, \cos t, \sin t) \quad \text{con } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos t, 0, \sin t) \quad \text{con } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$



PERCORSO AL CONTRARIO

— o — o —

