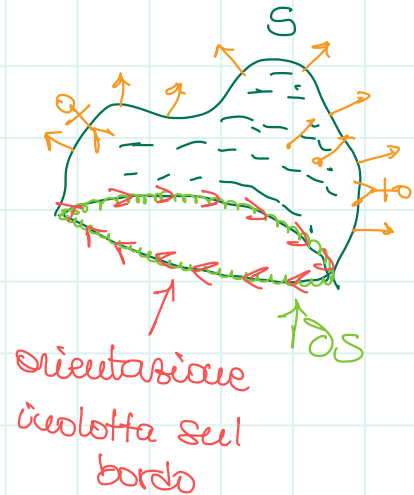




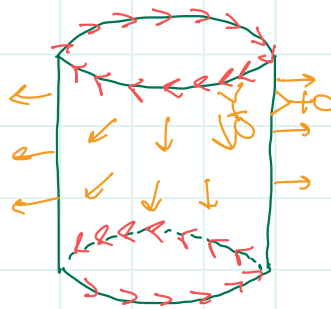
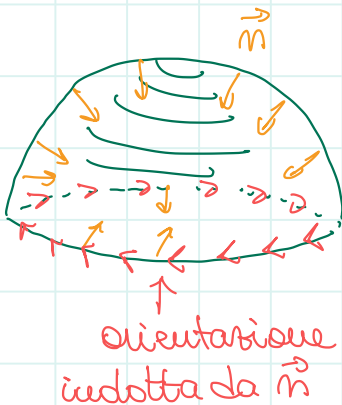
ORIENTAZIONE DEL BORDO DI UNA SUPERFICIE

Data una superficie con una orientazione fissata (cioè una scelta del vettore normale $\vec{n}$) vogliamo definire la corrispondente orientazione del bordo.

Si dice orientazione di ∂S indotta da $\vec{n}$ il verso di percorrenza di un uomo che percorre il bordo di S lasciando S alla sua sinistra e rimanendo in piedi secondo l'orientazione stabilita da $\vec{n}$.



Esempi



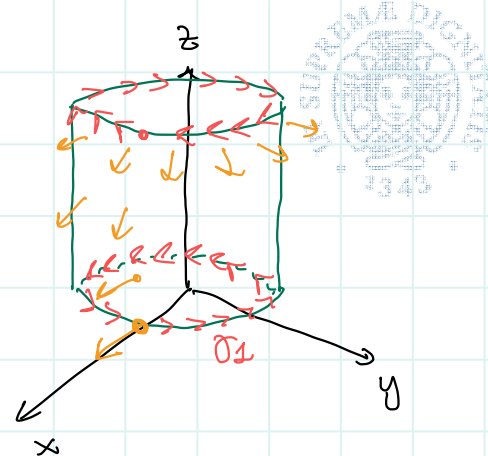
Matematicamente come posso "vedere" tutto ciò?

- Scrivo una parametrizzazione $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ della superficie, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.
- Verifico che $\vec{n}$ ottenuto a partire da $\Phi_u \wedge \Phi_v$ sia proprio l'orientazione voluta della superficie.
- Parametrizzo $\partial\Omega$ (nel piano) con una curva che lascia Ω a sinistra. L'immagine della curva percorre ∂S nel verso giusto.

Esempio (cilindro)

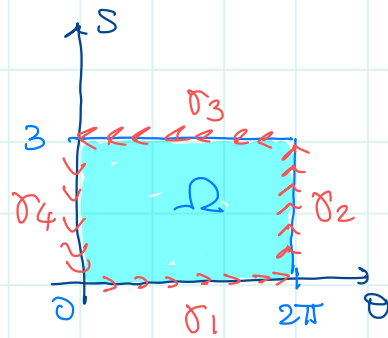
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, z \in [0, 3]\}$$

con orientazione verso l'esterno



① Parametrizzo il cilindro

$$(2\cos\theta, 2\sin\theta, s) \quad \underbrace{0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq s \leq 3}_{\text{insieme } \Omega \text{ dove variano i parametri}}$$



$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2\cos\theta & 2\sin\theta & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{pmatrix}$$

Dividendo per la norma viene $\vec{n} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$

Domanda: è quello giusto? Sì, perché ad esempio per $\theta = 0$, cioè sul semiasse positivo delle x , viene $(1, 0, 0)$

③ $\partial\Omega$ è dato da 4 curve che percorrono i lati come in figura

$$\sigma_1(t) = (t, 0) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma_2(t) = (2\pi, t) \quad \text{con } t \in [0, 3]$$

$$\sigma_3(t) = (t, 3) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi] \quad \text{percorsa al contrario}$$

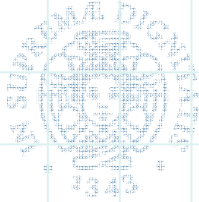
$$\sigma_4(t) = (0, t) \quad \text{con } t \in [0, 3] \quad \text{percorsa al contrario}$$

In alternativa, se non voglio dover ricordare di percorrere al contrario, basta fare

$$\sigma_3(t) = (2\pi - t, 3) \quad \text{con } t \in [0, 2\pi]$$

$$\sigma_4(t) = (0, 3 - t) \quad \text{con } t \in [0, 3]$$

Cosa diventano le 4 curve sulla superficie?



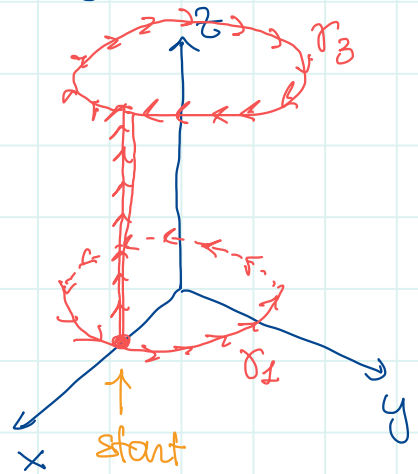
σ_1 diventa $(2\cos t, 2\sin t, 0)$

σ_3 diventa $(2\cos t, 2\sin t, 3)$ percorsa al contrario

σ_2 diventa $(2, 0, t)$

σ_4 diventa $(2, 0, t)$ percorsa al contrario

Morale: σ_1 e σ_3 si ritrovano a parametrizzare il bordo con l'orientazione giusta, mentre σ_2 e σ_4 si cancellano tra di loro



TEOREMA DEL ROTORE (AKA FORMULA DI STOKES)

- Ingredienti:
- una superficie S con un bordo ∂S
 - una orientazione $\vec{n}$ di S e la corrispondente orientazione di ∂S
 - un campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$
(fatto dipende da (x, y, z))

Allora vale la formula

integrale superficiale	integrale curvilineo	integrale di forma diff.
↓	↓	↓
$\int_S \langle \text{rot } \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle ds = \int_{\gamma^+} A dx + B dy + C dz$		
↑ orientazione della superficie	↑ vettore tangente al ∂S con l'orientazio- ne ereditata da $\vec{n}$	↑ una o più curve che percorrono ∂S nel verso giusto

Detto a parole: il flusso di un rotore attraverso una sup. S è uguale alla circuitazione del campo lungo il bordo

L'ultima uguaglianza è ovvia se si pensa alla formula per z .

Infatti se $(x(t), y(t), z(t))$ è una curva che percorre il bordo, allora

$$\vec{\tau} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

A questo punto

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle dS = \int_{\gamma} \underbrace{(A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z})}_{\langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\dots}} \sqrt{\dots} dt}_{dS}$$

$$= \int_{\gamma} A dx + B dy + C dz$$

$$= \int_a^b (A(x(t), y(t), z(t)) \dot{x}(t) + \dots + \dots) dt$$