

Formula per l'area di un sottoinsieme del piano dato il bordo

$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\gamma^+} x dy = - \int_{\gamma^+} y dx$$

dove γ^+ è una curva o una unione di curve che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra.

Dati Usare teo. della div con $\vec{E} = (x, 0)$ oppure $\vec{E} = (0, y)$.

Oss. Valgono anche formule creative del tipo

$$\text{Area}(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\gamma^+} x dy - y dx = \frac{1}{3} \int_{\gamma^+} x dy - \frac{2}{3} \int_{\gamma^+} y dx$$

(si ottengono con $\vec{E} = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$ oppure $\vec{E} = (\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}y)$).

In maniera analoga possiamo ottenere formule per il volume di solidi data una parametrizzazione del bordo.

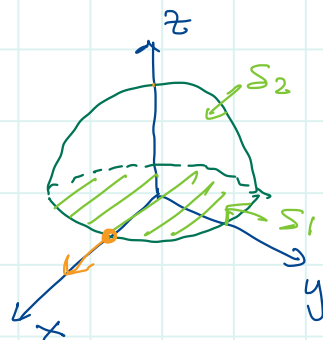
Esempio Calcolo volume semisfera con teo divergenza

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$$

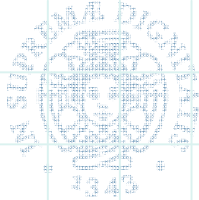
Per il teo. della divergenza scelgo $\vec{E} = (0, 0, z)$ e ottengo

$$\text{Vol}(V) = \iiint_V \text{div } \vec{E} dx dy dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

Occorre capire come parametrizzare il bordo, che è fatto da 2 pezzi.



S_1 si parametrizza come $(u, v, 0)$ con $\underbrace{u^2 + v^2 \leq 1}_\Omega$



Quindi

$$\begin{array}{ccc} * & * & * \\ \Phi_u & 1 & 0 & 0 \\ \Phi_v & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\leadsto (M_1, M_2, M_3) = (0, 0, 1) = \vec{n}$$

è la normale interna,
ma a noi serve quella
ESTERNA

Quindi

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{S_1} \langle (0, 0, 1), (0, 0, -1) \rangle d\sigma = 0$$

$\uparrow$
 (M_1, M_2, M_3) cambiato di segno
 $\uparrow$
 $= 0$ su S_1

S_2 si parametrizza in coord. sferiche, quindi

$$(\cos\varphi \cos\theta, \cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi) \quad \text{con } \theta \in [0, \pi] \text{ e } \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Per gentile concessione della Les. 48 troviamo che

$$(M_1, M_2, M_3) = (r^2 \cos^2\varphi \cos\theta, r^2 \cos^2\varphi \sin\theta, r^2 \cos\varphi \sin\varphi)$$

È la $\vec{n}$ giusta o bisogna cambiare segno? Vediamo che succede al polo Nord, cioè $\varphi = \frac{\pi}{2}$ e non va benissimo:

Proviamo all'equatore, ad esempio in $(1, 0, 0)$ cioè $\varphi = 0$ e $\theta = 0$

$$(M_1, M_2, M_3) = (1, 0, 0)$$

quindi è la $\vec{n}$ giusta, quindi

$$\int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}_{\text{descrizione di dove variano i parametri}} \underbrace{\sin^2\varphi \cos\varphi}_{\substack{\uparrow \\ AM_1 + BM_2 + CM_3}} = 2\pi \left[\frac{1}{3} \sin^3\varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} \quad \text{😊}$$

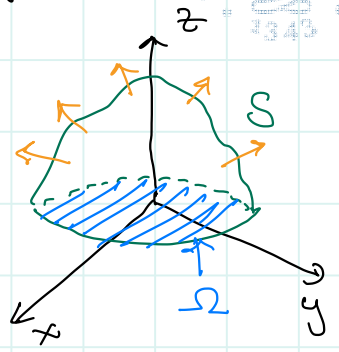
TECNICA DI SOSTITUZIONE DELLA SUPERFICIE

(cogli integrali di flusso)

Esempio $S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^4 = 1, z \geq 0 \}$

orientazione "verso l'alto"

$$\vec{E} = (x, \arctan x + z^2, \sin y + z)$$



Calcolare $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$

1° metodo Se voglio usare la definizione, devo per forza parametrizzare S. Un possibile modo è cartesiano

$$(u, v, \sqrt[4]{1-u^2-v^2}) \quad \text{con} \quad \frac{u^2+v^2 \leq 1}{\text{base } \Omega}$$

Con un po' di pazienza calcolo M_1, M_2, M_3 e infine

$$\iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

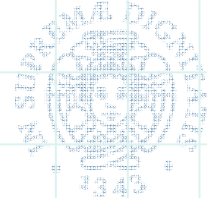
Auguri, sono un po' di conti 😊

2° metodo Consideriamo il solido V che ha come bordo la superficie S data e la sua base Ω .
Il teo. della div ci dice che

$$\begin{aligned} \underbrace{\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dx dy dz}_{(1)} &= \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma}_{(2)} + \underbrace{\int_{\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma}_{(3)} \end{aligned}$$

② = ① - ③, quindi se so fare ① e ③, allora so fare ②, che è quello che voglio.

$\text{div } \vec{E} = 2$, quindi $\iiint_V \text{div } \vec{E} \, dx \, dy \, dz = 2 \, \text{Vol}(V)$



e questo si può fare per sezioni lungo asse z :

$$\text{Vol}(V) = \int_0^1 dz \, \text{Area}(S_z) = \pi \int_0^1 (1-z^4) dz = \text{si fa } \odot$$

$\uparrow$
 cerchio di
 raggio $\sqrt{1-z^4}$

$$\textcircled{3} = \int_{\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \int_{\Omega} (\sin y + z) d\sigma$$

$\uparrow$
 vettore $(0,0,-1)$
 $\uparrow$
 deve essere la
 normale esterna a V

$\uparrow$
 0
 su Ω

$$= \int_{\Omega} \sin y \, dx \, dy$$

Ω si parametrizza come $(u,v,0)$ $= 0$ per simmetria $\odot$

Morale: $\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = 2 \, \text{Vol}(V) = \text{si fa facile} !!$

Oss. Se fosse accaduto che $\text{div } \vec{E} = 0$, allora avremmo avuto che

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = - \int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

dove S_1 è una QUALUNQUE superficie che insieme ad S costituisca il bordo di un solido V , di cui $\vec{n}$ è la normale esterna.

Morale: $\text{div } \vec{E} = 0$ vuol dire che nulla si crea e nulla si distrugge all'interno di V , quindi ciò che entra da S è uguale a ciò che esce da S_1 e viceversa

— $\circ$ — $\circ$ —