



TEOREMA DI GAUSS - GREEN

(AKA formula di integrazione per parti in n variabili)

Due variabili

Ingredienti

- un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$
- un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$
- una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Allora vale la formula

$$\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial \Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy$$

↑
integrale in 2 variabili
in Ω

↑
integrale
curvilineo su
bordo di Ω

↑
integrale in 2 variabili
in Ω

normale esterna
rispetto ad Ω

Analisi 1

La formula di integrazione per parti era

$$\int_a^b f(x) g'(x) \, dx = [f(x) g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx$$

Tre variabili

Ingredienti

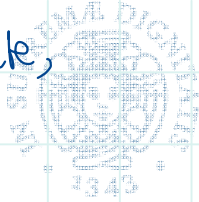
- Un insieme $V \subseteq \mathbb{R}^3$
- Un campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$
- una funzione $f: V \rightarrow \mathbb{R}$

$$\iiint_V f \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma - \iiint_V \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx \, dy \, dz$$

↑
normale esterna

GG $\Rightarrow$ Teo della divergenza

Basta prendere $f \equiv 1$ costante,
per cui $\nabla f \equiv 0$ e si ottiene
il teo. della divergenza



Teo della div. implica GG

Scriviamolo in $\mathbb{R}^2$

Ipotesi $\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}_1 dx dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}_1, \vec{n} \rangle ds$

Tesi $\iint_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} dx dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds - \iint_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle dx dy$

Basta applicare l'ipotesi con $\vec{E}_1 = f \cdot \vec{E}$ (questo è un campo).
Abbiamo dim. in una ltr. prec. che

$$\operatorname{div}(\vec{E}_1) = f \operatorname{div} \vec{E} + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

Si ottiene che

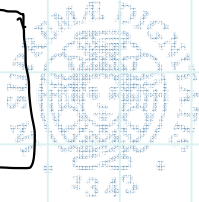
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (f \operatorname{div} \vec{E} + \underbrace{\langle \nabla f, \vec{E} \rangle}_{\substack{\text{basta portarlo} \\ \text{a dx}}}) dx dy &= \int_{\partial\Omega} \langle f \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \\ &= \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds \end{aligned}$$

Oss. GG è come l'integrazione per parti di Analisi 1

Il teo. della div è come dire che l'integrale di una
derivata è la differenza tra i valori agli estremi.

In tre variabili è tutto uguale, solo con gli integrali
superficiali invece che curvilinei.

Applicazione in due variabili: integrali su insiemi descritti mediante il loro bordo

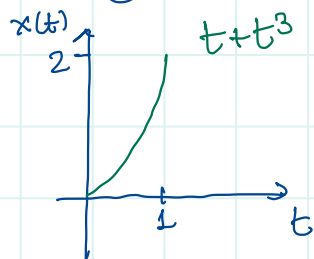


Esempio 1 Consideriamo la curva

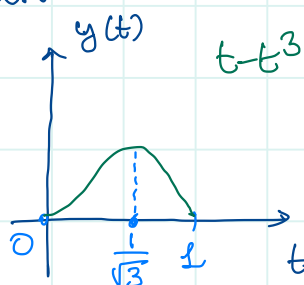
$$\gamma(t) = (t+t^3, t-t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Facciamo un disegno approssimativo

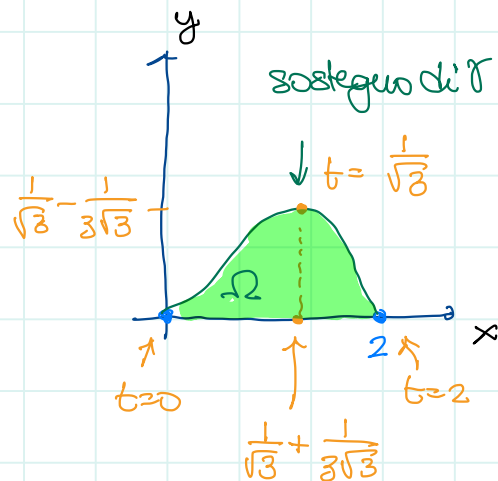
Disegniamo le 2 componenti



↑ componente monotona
⇒ curva semplice



$$\dot{y}(t) = 1 - 3t^2$$



Consideriamo l'insieme Ω limitato dall'asse x e dal sostegno della curva (insieme descritto mediante il bordo).

Calcolare le coordinate del baricentro di Ω , cioè $\text{Area}(\Omega)$ e

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy$$

$$\iint_{\Omega} y \, dx \, dy$$

Grosso guaio: NON abbiamo una descrizione di Ω come insieme normale

Idea: il teorema della divergenza trasforma integrali all'interno di Ω in integrali sul bordo!!

$$\iint_{\Omega} \text{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\sigma^+} A \, dy - B \, dx$$

se questa fosse $\equiv 1$,
avrei l'area Ω

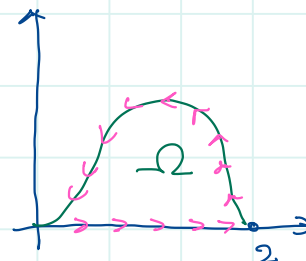
Scegliamo $\vec{E}$ con $\text{div } \vec{E} = 1$, cioè $A_x + B_y = 1$, ad esempio

$$\vec{E} = (x, 0)$$

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial^+ \Omega} x \, dy - 0 \, dx$$

$\uparrow$
 curva che percorre $\partial\Omega$
 lasciando Ω a sinistra

La curva ∂^+ che ci serve è uguale a
 un pezzo di asse x seguita dalla curva
 data PERCORSO AL CONTRARIO



$$\partial_1(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [0, 2] \quad \leftarrow \text{pezzo di asse } x$$

$$\partial_2(t) = (t+t^3, t-t^3) \text{ con } t \in [0, 1] \quad \text{AL CONTRARIO}$$

Quindi
$$\text{Area}(\Omega) = \int_{\partial^+} x \, dy = \int_{\partial_1} x \, dy - \int_{\partial_2} x \, dy$$

$\uparrow$
 percorsa al
 contrario

$$= \int_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{t} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}}{0} \, dt - \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ x(t)}}{(t+t^3)} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}}{(1-3t^2)} \, dt = \text{si fa...}$$

In alternativa, posso scegliere $\vec{E} = (0, y)$ e quindi

$$\text{Area}(\Omega) = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial^+} A \, dy - B \, dx = \int_{\partial^+} -y \, dx$$

$\uparrow$
 stessa di
 prima

$$= - \int_{\partial_1} y \, dx + \int_{\partial_2} y \, dx = - \int_0^2 \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{0} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{1} \, dt + \int_0^1 \underset{\substack{\uparrow \\ y(t)}}{(t-t^3)} \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{x}(t)}}{(1+3t^2)} \, dt$$

$\uparrow$
 2 seguiti

= ... si fa e viene uguale a prima (si spera :))

Se su Ω voglio integrare x , basta scegliere $\vec{E} = (\frac{1}{2}x^2, 0)$
oppure $\vec{E} = (0, xy)$ oppure $\vec{E} = (\arctan y + e^y, xy + \sin(x))$
o qualunque altra cosa con $\text{div } \vec{E} = x$.

Ad esempio, utilizzando il secondo viene

$$\iint_{\Omega} x \, dx \, dy = \iint_{\Omega} \text{div } \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial^+} A \, dy - B \, dx = - \int_{\partial^+} xy \, dx$$

$\uparrow$ solito

$$= - \int_{\sigma_1} xy \, dx + \int_{\sigma_2} xy \, dx = \int_0^1 (t+t^3)(t-t^3)(1+3t^2) \, dt$$

$\uparrow$
0 su σ_1 $x(t)$ $y(t)$ $\dot{x}(t)$

= si fa ...

Analogamente per integrare y posso scegliere

$$\vec{E} = (xy, 0) \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = (0, \frac{1}{2}y^2)$$

o cose più creative ☺.

— o — o —