



INTEGRALI DI FLOSSO

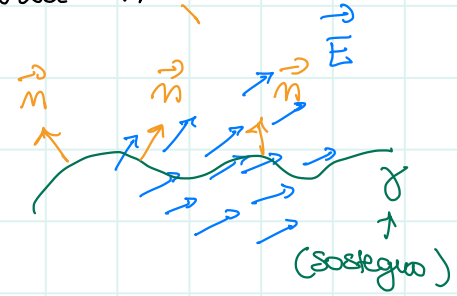
Due variabili Ingredienti

→ Campo vettoriale $\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$

→ curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in [a, b]$

→ scelta del vettore normale alla curva $\vec{n}$

(il vettore normale si può scegliere in 2 modi diversi: una volta scelto in un punto, ce lo trasciniamo dietro)



L'integrale di flusso si definisce come

$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds$$

scritto in questo modo è un integrale curvilineo

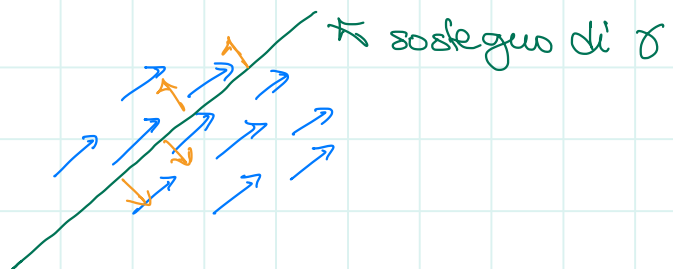
Interpretazione "fisica": → $\vec{E}$ è la direzione del vento

→ il sostegno di γ è una vela

→ $\vec{n}$ indica la direzione in cui si vuole andare

→ L'integrale di flusso è quanto il vento spinge la vela in quella direzione

Connette con interpretazione fisica: se $\vec{E}$ è $\perp$ a $\vec{n}$, allora il flusso è 0, indipendente mente dal "segno di $\vec{n}$ "

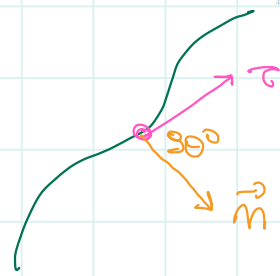


Come calcolo $\vec{n}$ Sappiamo che $\vec{n}$ è $\perp$ al tangente alla curva

Poiaviamo $\vec{c} = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}$

Ruotando di 90° in verso orario

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, -\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \quad \uparrow \text{ scelta canonica del versore normale}$$



Con questa scelta l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds &= \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - B(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right\} \underbrace{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt}_{ds} \\ &= \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{y}(t) - B(x(t), y(t)) \dot{x}(t) \} dt \\ &= \int_{\gamma} A dy - B dx \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto che

integrale curvilineo

integrale di forma diff.

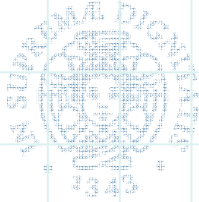
$$\int_{\gamma} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle ds = \int_{\gamma} A dy - B dx$$

versore normale canonico,

ottenuto ruotando di 90° in verso

ORARIO il versore tangente a γ

Oss. Se il versore $\vec{n}$ dato non è quello canonico, allora basta cambiare i segni.



Le variabili Ingredienti

→ Campo di vettori $\vec{E} = (A, B, C)$

(tutto ora dipende da x, y, z)

→ Una superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$

→ Una scelta $\vec{n}$ del vettore normale ad S

↑ (tra le 2 possibili, posto che esistano)

Anche in questo caso l'integrale si definisce come

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma$$

↑ integrale superficiale

Come calcolo $\vec{n}$?

Supponiamo di aver parametrizzato la superficie con

$$\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Calcoliamo (M_1, M_2, M_3) con la formula misteriosa $\Phi_u \wedge \Phi_v$

Allora il vettore normale canonico è

$$\frac{1}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}} (M_1, M_2, M_3)$$

Da questo si ottiene

integrale superficiale

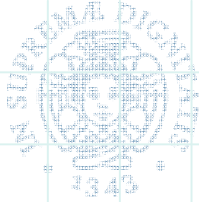
Integrale doppio standard

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) du dv$$

se $\vec{n}$ è il vettore
normale canonico

↑
 $A(X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) M_1(u, v) + \dots$

TEOREMA DELLA DIVERGENZA



Due Variabili

Ingredienti

→ un campo di vettori $\vec{E} = (A, B)$

(tutto dipende da (x, y))

→ un insieme $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Allora vale la formula

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\gamma^+} A \, dy - B \, dx$$

↑
integrale doppio di una funzione

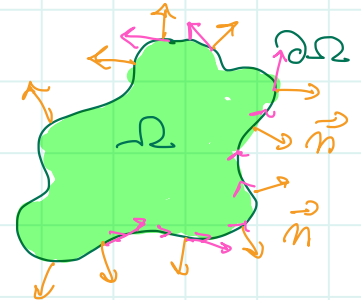
↑
bordo di Ω

↑
normale USCENTE da Ω

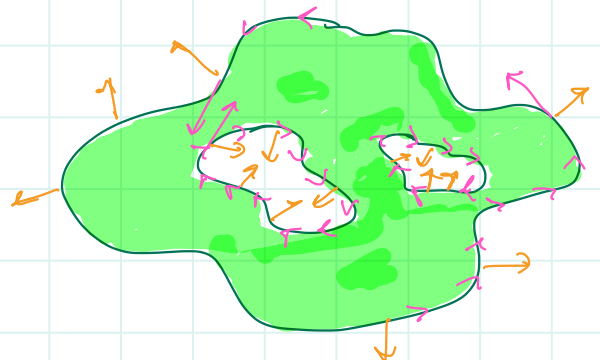
↑
curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω alla propria SINISTRA

integr. curv.
formula di prima

Oss. Se la curva è percorsa lasciando Ω a sinistra, allora la normale esterna $\vec{n}$ al $\partial\Omega$ si ottiene ruotando di 90° in verso orario il tangente alla curva



Nel caso in cui Ω ha dei buchi, occhio ai versi di percorrenza nei bordi interni

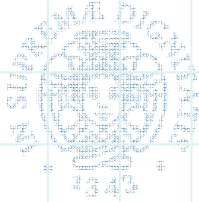


Tre variabili

Ingredienti:

→ campo vettoriale $\vec{E} = (A, B, C)$

→ insieme $V \subseteq \mathbb{R}^3$.



Allora vale la formula

integrale triplo di una funzione

normale ESTERNA a V

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx \, dy \, dz = \int_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$$= \iint_{\Omega} (A M_1 + B M_2 + C M_3) \, du \, dv$$

si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ è una parametrizzazione di ∂V per cui il vettore normale canonico è proprio $\vec{n}$.

Achtung! Fare attenzione a 3 cose:

- ① L'orientazione
- ② L'orientazione
- ③ L'orientazione

— o — o —