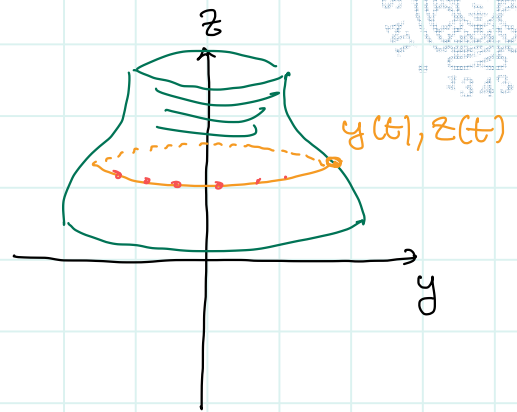


SUPERFICI DI ROTAZIONE

Supponiamo di avere una curva nel piano yz con $y > 0$ e di ruotarla di 360° intorno all'asse z .

Ottengo una superficie S .

Obiettivo: calcolare l'area di S .



Se la curva è parametrizzata da

$$\sigma(t) = (y(t), z(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$

allora

$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

che si può anche scrivere come

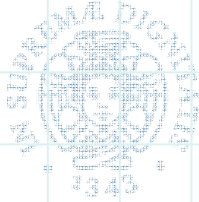
$$\text{Area}(S) = \text{lunghezza}(\sigma) \cdot 2\pi y_G$$

GULDINO 2 (per le aree)

lunghezza della circonferenza percorsa da G durante la rotazione

Coordinata y del baricentro della CURVA

Dalla prima formula alla seconda il passaggio è banale: basta moltiplicare e dividere per la lunghezza



$$\begin{aligned}
 \text{Area}(S) &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\
 &= \text{lunghezza} \cdot 2\pi \underbrace{\frac{1}{\text{lunghezza}} \int_a^b y(t) \sqrt{\dots} dt}_{\int_{\gamma} y ds} \\
 &= \text{lunghezza}(\gamma) \cdot 2\pi \underbrace{\frac{\int_{\gamma} y ds}{\text{lunghezza}(\gamma)}}_{\bar{y}_S}
 \end{aligned}$$

Resta da dimostrare la 2ª formula.

1º passo Scrivere una parametrizzazione di S

$$\underbrace{(y(t) \cos \theta, y(t) \sin \theta, z(t))}_{\text{stiamo prendendo } (y(t), z(t)) \text{ nel piano } yz \text{ e lo ruotiamo intorno all'asse } z} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad a \leq t \leq b$$

2º passo Calcoliamo M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ X_\theta & Y_\theta & Z_\theta \\ X_t & Y_t & Z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * \\ -y(t) \sin \theta & y(t) \cos \theta & 0 \\ \dot{y}(t) \cos \theta & \dot{y}(t) \sin \theta & \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = (\dot{z}(t) y(t) \cos \theta, \dot{z}(t) y(t) \sin \theta, -y(t) \dot{y}(t))$$

3º passo $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \sqrt{\dot{z}(t)^2 y(t)^2 + \dot{y}(t)^2 y(t)^2}$

$$= \underbrace{y(t)}_{\uparrow} \sqrt{\dot{z}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

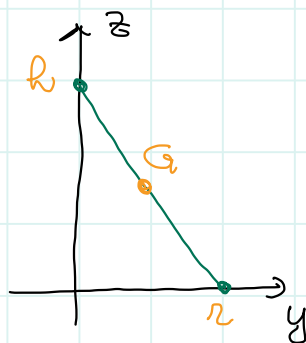
abbiamo supposto la curva nel semipiano $y \geq 0$

4° passo Integrazione finale

$$\text{Area}(S) = \int_{\underbrace{0}_{2\pi}}^{2\pi} d\theta \int_a^b dt \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Esempio 1 Superficie laterale cono

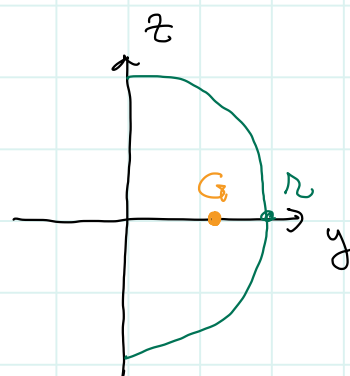
$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G \\ &= \sqrt{R^2 + r^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2} = \pi r \sqrt{R^2 + r^2} \end{aligned}$$



Esempio 2 Superficie sfera

$$\begin{aligned} \text{Area}(S) &= \text{lunghezza} \cdot 2\pi y_G \\ &= \pi r \cdot 2\pi \left[\frac{2}{\pi} r \right] \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

↑ Vedi lezione su baricentro curva



Esempio 3 Superficie segmento sferico
(solo parte laterale)

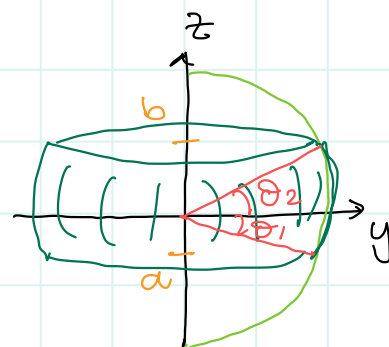
Parametrizzo la curva come

$(r \cos \theta, r \sin \theta)$ con $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$

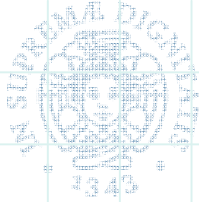
$$\text{Area}(S) = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} \underbrace{r \cos \theta}_y \sqrt{\underbrace{r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta}_{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}} d\theta$$

$$2\pi r \int_{\theta_1}^{\theta_2} r \cos \theta d\theta = 2\pi r \{ r \sin \theta_2 - r \sin \theta_1 \}$$

$2\pi r (b-a)$ (Quando $b=r$ e $a=-r$ ritroviamo l'esempio 2)



INTEGRALI SUPERFICIALI



1 Notazioni

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma$$

superficie

funzione di 3 variabili definita almeno sul supporto della superficie

$d\sigma$: indica che si tratta di integrale superficiale

4 Formula per il calcolo Supponiamo di aver parametrizzato S nel solito modo

$$(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ con } (u, v) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

Allora

$$\int_S f(x, y, z) d\sigma = \iint_{\Omega} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} du dv$$

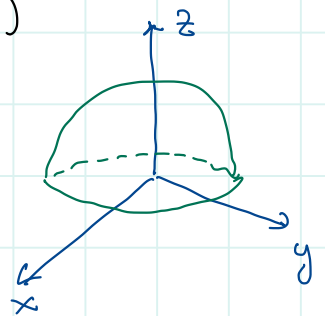
Dato l'integrale, possiamo anche definire il baricentro di una superficie come il punto G di coordinate

$$x_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S x d\sigma, \quad y_G = \frac{1}{\text{Area}(S)} \int_S y d\sigma, \quad z_G = \dots$$

Esempio (Baricentro della semisfera come superficie)

$$\text{Area}(S) = 2\pi r^2. \text{ Per simmetria } x_G = y_G = 0.$$

Resta da calcolare $\int_S z d\sigma$.



Devo parametrizzare la superficie

$$(r \cos \varphi \cos \theta, r \cos \varphi \sin \theta, r \sin \varphi)$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Calcolo M_1, M_2, M_3

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ -r \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & 0 \\ -r \sin \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\leadsto (r^2 \cos^2 \varphi \cos \theta, r^2 \cos^2 \varphi \sin \theta, r^2 \cos \varphi \sin \varphi)$$

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = r^2 \sqrt{\cos^4 \varphi + \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi} = r^2 \cos \varphi$$

Allora
$$\int_S z \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \underbrace{r \sin \varphi}_z \cdot \underbrace{r^2 \cos \varphi}_{\sqrt{\dots}}$$

$$= 2\pi r^3 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \pi r^3 [\sin^2 \varphi]_0^{\pi/2} = \pi r^3$$

A questo punto
$$z_G = \frac{1}{\text{Area}} \int_S z \, d\sigma = \frac{1}{2\pi r^2} \pi r^3 = \frac{r}{2}$$

— 0 — 0 —