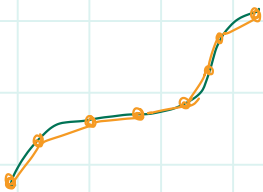


AREA DI UNA SUPERFICIE

- ① Come NON si definisce
- ② Idea della definizione
- ③ Come si calcola

Setting: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$
 $(u, v) \in \Omega$

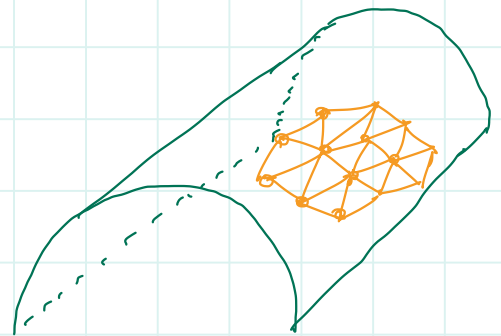
① Come NON si definisce



Per le curve si faceva il sup della lunghezza delle poligoni inscritte

Per le superfici questo porterebbe a fare il sup delle triangolazioni inscritte

Brutta notizia: molti casi banali, il sup viene sempre $+\infty$!!

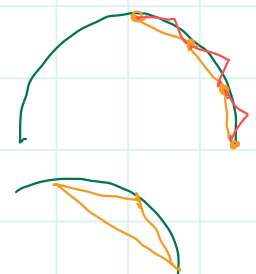
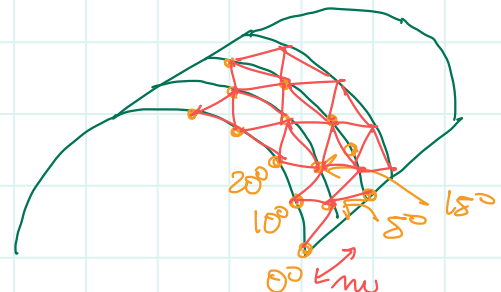


Noto brutale per cui NON funziona:

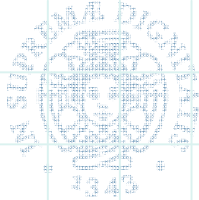
EFFETTO FISARMONICA

Facciamo una triangolazione come in figura.

Quando la distanza m tra due semicirconferenze diventa molto piccola, i triangoli tendono a diventare "verticali" rispetto alla sup, come quando chiudi una fisarmonica

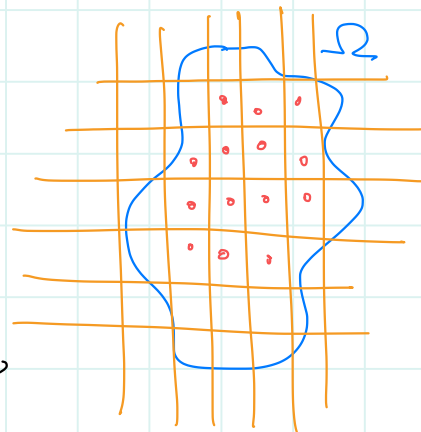


Morale: se infettisco molti i triangoli, allora l'unione dei triangoli non approssima bene la superficie

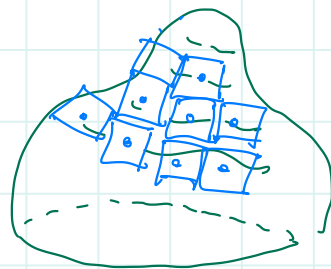


② Idea della definizione

- Dividiamo Ω in rettangolini
- In ogni rettangolo prendiamo un p.to
- Invece di considerare Φ di ogni rettangolo, approssimiamo Φ con il suo sviluppo di ordine 1 nel p.to prescelto, e calcoliamo l'immagine del rettangolo mediante questo sviluppo, che è una applic. affine.



Geometricamente, sto approx. la superficie con "pezzi di piano tangente"
È come se stessimo "piastrellando" la superficie.



③ Formula per il calcolo

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} \, du \, dv$$

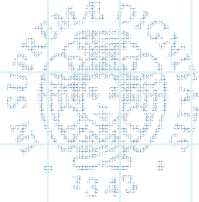
$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
dipendono da u e v

Motivo di algebra lineare: cosa succede se sviluppo Φ

$$\Phi(u, v) = \underbrace{\Phi(u_0, v_0) + \Phi_u(u_0, v_0)(u - u_0) + \Phi_v(u_0, v_0)(v - v_0)}_{\text{mappa affine}}$$

La trasformazione a destra manda rettangoli di area 1 in parallelogrammi di area $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$

Esercizio Consideriamo il piano $ax+by+cz=d$
 Calcolare l'area della parte di piano che sta sopra
 il rettangolo $[0,1] \times [0,1]$.
 Facendo il conto, si ottiene la formula di sopra



Parametizzo la superficie $(u, v, \frac{d-au-bv}{c}) = \Phi(u, v)$

Calcolo Φ_u e Φ_v

$$\begin{aligned} \Phi_u &\rightarrow \begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & -\frac{a}{c} \\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, 1 \right) = (M_1, M_2, M_3) \\ \Phi_v &\rightarrow \end{pmatrix}$$

$$\text{Area} = \int_0^1 du \int_0^1 dv \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1} = \sqrt{\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1}$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare calcolando l'area in
 maniera elementare (volendo si tratta di fare l'area di due
 triangoli nello spazio)

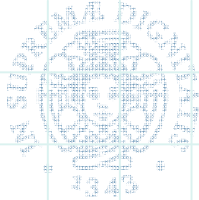
Caso speciale: sup. contestiana Consideriamo

$$(u, v, f(u, v)) \quad (u, v) \in \Omega$$

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (-f_u, -f_v, 1) = (M_1, M_2, M_3)$$

$$\text{Area}(S) = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, du \, dv$$

Oss. È l'analogo della formula per la length delle curve cartesiane



$$(t, f(t)) \text{ con } t \in [a, b] \rightsquigarrow \text{length} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Esempio (Area del cilindro)

$\phi(\theta, z)$

$$(r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

↑ raggio base dato

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq R$$

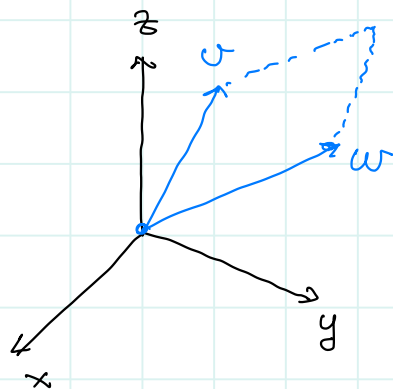
↑ altezza data

$$\begin{matrix} \phi_\theta & \phi_z \end{matrix} \begin{pmatrix} * & * & * \\ -r \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 \end{matrix} (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

$$\text{Area} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = r \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz = 2\pi r R$$

Oss. Altra formula per l'area

Dati in $\mathbb{R}^3$ due vettori v e w , pensati applicati nell'origine, chi è l'area del parallelogramma di vertici $0, v, w, v+w$?



L'area è $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$, dove $(M_1, M_2, M_3) = v \wedge w$
 ↑ prodotto vettore

Altro modo di scrivere la stessa cosa. Considero la matrice

$$M = \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}. \quad \text{Allora } (\text{area})^2 = \text{Det } \boxed{M^t M}$$

matrice 2×2

Esercizio: fare il conto e vedere che viene la stessa cosa!