

SUPERFICI Tre tipi di descrizione (siamo sempre in $\mathbb{R}^3$)

→ cartesiana

→ implicita

→ parametrica

} 3 modi di
descrivere una
superficie

CARTESIANA Data $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, la sup. è il grafico di f

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, z = f(x, y) \}$$

IMPLICITA Data $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ possiamo considerare il suo luogo di zeri

implicita perché non ho
ricavato nessuna variabile

$$S = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{f(x, y, z) = 0} \}$$

equazione della superficie

PARAMETRICA Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e data $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ consideriamo la superficie

$$S = \text{immagine di } \Phi$$

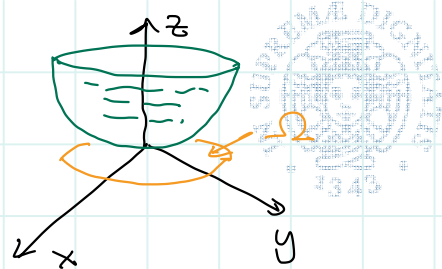
Se $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$, allora

$$S = \{ (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v)) : (u, v) \in \Omega \}$$

Esempio 1

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \underbrace{x^2 + y^2 \leq 1}_{\substack{\text{descrive la} \\ \text{base } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2}}, z = \underbrace{x^2 + y^2}_{f(x, y)}\}$$

$\uparrow$
coordinata



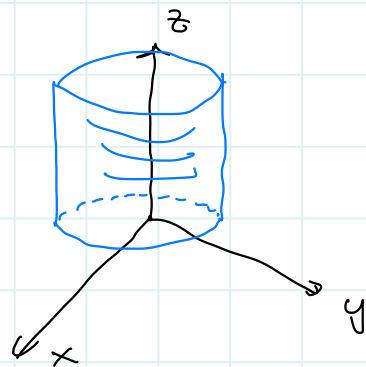
$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{z - x^2 - y^2 = 0}_{\substack{\text{equazione della} \\ \text{sup. in forma implicita}}}, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

In maniera parametrica potrei porre

$$\Phi(u, v) = \{(u, v, \underbrace{u^2 + v^2}_{\substack{\uparrow \\ \text{3^a coord.} = \text{somma} \\ \text{dei quadrati delle prime 2}}}) : (u, v) \in \Omega\}$$

$\uparrow$ solita base $u^2 + v^2 \leq 1$

Esempio 2 Cilindro con asse z
raggio base 2 e altezza $[0, 5]$



Descrizione parametrica

$$(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, z) \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq 5$$

o equivalentemente

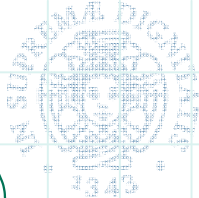
$$(2 \cos u, 2 \sin u, v) \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 5]$$

$\Omega = \text{rettangolo}$

Descrizione implicita:

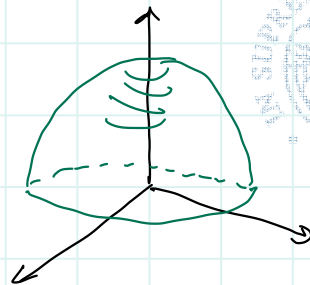
$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 4, \quad 0 \leq z \leq 5\}$$

Esempio 3 (Semi-sfera) Raggio = 3
centro nell'origine



$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0\}$$

↑
implicita



$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 9}_{\text{base } \Omega}, z = \underbrace{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}_{f(x, y)}\}$$

↑
cartesiana

La descrizione parametrica la possiamo dare sfruttando la cartesiana

$$(u, v, \sqrt{9 - u^2 - v^2}) : \boxed{u^2 + v^2 \leq 9} \text{ descrizione della base}$$

oppure usando le coord. sferiche

$$(3 \cos \varphi \cos \vartheta, 3 \cos \varphi \sin \vartheta, 3 \sin \varphi)$$

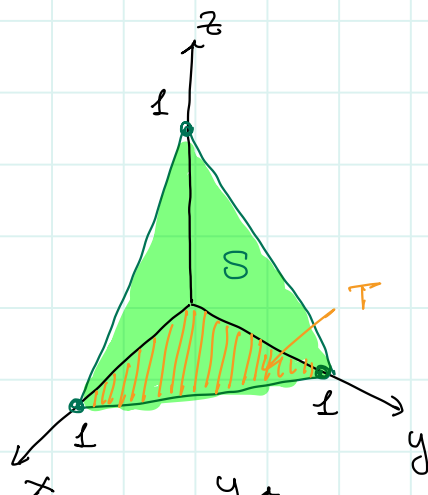
$$0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

Esempio 4 $S =$ triangolo con vertici
in $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \underbrace{x + y + z = 1}_{\text{eq. del piano}}\}$$

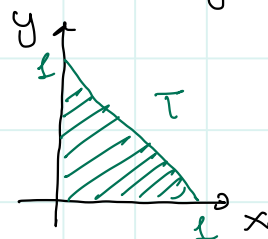
↑
implicita



$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, z = 1 - x - y\}$$

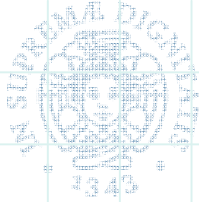
↑
cartesiana

$$\uparrow \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1 \}$$



$$\{(u, v, 1 - u - v) : (u, v) \in T\}$$

PIANO TANGENTE E VETTORE / VERSORE NORMALE



Sup. implicita Setting:

→ Superficie S di equazione $g(x, y, z) = 0$

→ $(x_0, y_0, z_0) \in S$, quindi $g(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Sappiamo che S è una superficie di livello di g , dunque S è "perpendicolare" a ∇g nel punto.

Quindi il piano tangente è il piano che passa per il pto ed è ortogonale al gradiente

$$g_x(x_0, y_0, z_0)x + g_y(x_0, y_0, z_0)y + g_z(x_0, y_0, z_0)z = \text{cost}$$

Un vettore normale è proprio $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$

↑
quello che si ottiene
sostituendo (x_0, y_0, z_0)
al posto di (x, y, z) a
sinistra

Sup. parametrica Setting

→ Data $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v), Z(u, v))$

con $(u, v) \in \Omega \leftarrow$ insieme dei parametri

→ Dato $(u_0, v_0) \in \Omega$

→ Trovare piano tangente ad S nel pto $\Phi(u_0, v_0)$

Si tratta del piano generato da $\Phi_u(x_0, y_0)$ e $\Phi_v(x_0, y_0)$

$$\{ \Phi(u_0, v_0) + t \Phi_u(u_0, v_0) + s \Phi_v(u_0, v_0) : (t, s) \in \mathbb{R}^2 \}$$

↑
p.to base

↑
derivate di Φ rispetto a u e v

Questa è una descrizione PARAMETRICA DEL PIANO. Se voglio l'eq. cartesiana mi devo procurare un vettore $\perp$ a Φ_u e Φ_v , e per questo c'è la "formula misteriosa" del prodotto vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v) = \underline{(M_1, M_2, M_3)}$$

vettore $\perp$ al piano

Quindi l'eq. cartesiana del piano tangente è del tipo

$$\boxed{M_1 x + M_2 y + M_3 z = d}$$

↑ scelto in modo che il piano passi per il punto in questione

Esempio 1 $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^4 + y^2 + 2z^2 = 7\}$

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, -2, 1) \in S$$

Trovare piano tangente

Si tratta di sup. implicita con $g(x, y, z) = x^4 + y^2 + 2z^2 - 7 = 0$.

Calcolo

$$\nabla g(x, y, z) = (4x^3, 2y, 4z)$$

$$\nabla g(1, -2, 1) = \boxed{(4, -4, 4)}$$

↑ vettore $\perp$ al piano tangente
(ma lo è anche $(1, -1, 1)$)

Quindi l'eq. sarà

$$\boxed{x - y + z = 4}$$

imponendo il passaggio per $(1, -2, 1)$

Esempio 2 $\Phi(u, v) = \{(u-v, u^2-v^2, uv) : (u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1]\}$

Calcolare il piano tangente in $(1, 1, 0)$

Intanto osservo che $(1, 1, 0)$ sta nella superficie

$$\begin{cases} u-v=1 \\ u^2-v^2=1 \\ uv=0 \end{cases} \quad \dots \quad \text{risolvendo trovo } u=1 \text{ e } v=0$$

Calcolo $\Phi_u = (1, 2u, v)$
 $\Phi_v = (-1, -2v, u)$

Sostituisco $u=1$ e $v=0$ e viene

$$\Phi_u(1,0) = (1, 2, 0)$$

$$\Phi_v(1,0) = (-1, 0, 1)$$

Quindi la parametrizzazione del piano è

$$(1, 1, 0) + t(1, 2, 0) + s(-1, 0, 1)$$

Per andare in cartesiana trovo il prod. vettore

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vettore normale alla sup. in $(1, 1, 0)$.

$$\leadsto (2, -1, 2) = (M_1, M_2, M_3)$$

$$2x - y + 2z = 1$$

imponendo passaggio per $(1, 1, 0)$

— 0 — 0 —