

GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE

GRADIENTE

Funzione $\rightarrow$ Vettore

Il gradiente è il vettore che ha come componenti le derivate parziali di una funzione

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(x) \right)$$

LAPLACIANO

Funzione $\rightarrow$ Funzione

Il Laplaciano è la somma delle derivate parziali seconde PURE

$$\Delta f(x) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x)$$

In due variabili

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$$

In tre variabili

$$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$$

Oss. Il Laplaciano è la TRACCIA della matrice Hessiana.

DIVERGENZA

Vettore $\rightarrow$ Funzione

Dato un campo $\vec{E} = (A, B)$ in due variabili, si pone
 $\uparrow \uparrow$ dipendono da x e y

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y$$

In tre variabili, se $\vec{E} = (A, B, C)$, allora
 $\uparrow \uparrow \uparrow$ dipendono da x, y, z

$$\operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$$

Si può anche generalizzare a n variabili. In questo caso $\vec{E}$ ha n componenti, che a loro volta dipendono da $x_1, \dots, x_n$ e



$$\operatorname{div} \vec{E} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial A_k}{\partial x_k} (x) \quad \text{ } k\text{-esima componente di } \vec{E}.$$

ROTORE

Vettore $\rightarrow$ Vettore

(CURL in inglese)

Lo fanno "sco" in 3 variabili. Se $\vec{E} = (A, B, C)$, allora $\operatorname{rot} \vec{E}$ si ottiene sviluppando formalmente il determinante

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

I fisici lo fanno anche in 2 variabili, pensando facilmente che la terza variabile sia nulla, quindi

$$\vec{E} = (A, B)$$

↑ ↑
dipendono
solo da x e y

$$\leadsto \operatorname{rot} \vec{E} = (0, 0, B_x - A_y)$$

Notazioni dei fisici

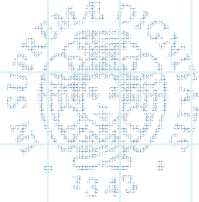
Gradiente : $\nabla \leftarrow \text{NABLA}$

Laplaciano : ∇^2

Divergenza : $\nabla \cdot \vec{E}$

Rotore : $\nabla \wedge \vec{E}$

Relazioni base



$$\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$$

$$\operatorname{div}(f_x, f_y, f_z) = (f_x)_x + (f_y)_y + (f_z)_z = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$$

vettore nullo

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\nabla f) &= (f_{zy} - f_{yz}, f_{xz} - f_{zx}, f_{yx} - f_{xy}) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

per inversione dell'ordine di derivazione

La formula vale anche in 2 variabili con il rotore dei fisici :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{E}) = 0$$

$$\operatorname{rot}(\vec{E}) = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot}(\vec{E})) &= (C_y - B_z)_x + (A_z - C_x)_y + (B_x - A_y)_z \\ &= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} + \cancel{A_{zy}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} \end{aligned}$$

Esercizio Calcolare la formula per $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E})$.

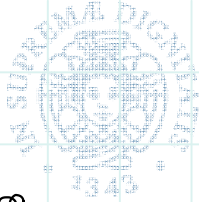
Achtung!

Molte delle formule che uno potrebbe scrivere NON hanno senso. Ad esempio

$$\operatorname{rot}(\Delta f), \quad \operatorname{rot}(\operatorname{div} \vec{E}) \quad (\operatorname{rot} \text{ vuole in input un vettore})$$

$$\begin{aligned} \nabla(\operatorname{rot} \vec{E}), \quad \Delta(\operatorname{rot} \vec{E}) \quad \operatorname{div}(\Delta f) \\ \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{vuole in input una funzione} \quad \text{vuole in input un vettore!} \end{aligned}$$

GRADIENTE NULLO / UGUALE



→ Se $\nabla f = 0$ e l'insieme di definizione è **CONNESSO**, allora f è costante

→ Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$ e sono definite su un connesso, allora $f_2 = f_1 + \text{costante}$

[Basta osservare che ∇ è lineare, quindi $\nabla(f_1 - f_2) = \nabla f_1 - \nabla f_2 = 0$]

ROTORE NULLO / UGUALE

$$\text{rot } \vec{E} = (C_y - B_z, A_z - C_x, B_x - A_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow C_y = B_z, \quad A_z = C_x, \quad B_x = A_y$$

$\Leftrightarrow$ la forma $\omega = A dx + B dy + C dz$ è chiusa

→ Se $\text{Rot } \vec{E} = 0$ e l'insieme di definizione è **SEMPL. CONNESSO**, allora $\vec{E} = \nabla f$ per una opportuna f .

→ Se $\text{rot } \vec{E}_1 = \text{rot } \vec{E}_2$ e sono su un sempl. connesso, allora $\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \nabla f$

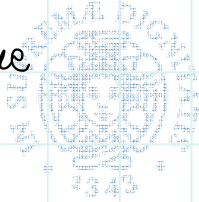
[Basta osservare che il rotore è lineare]

Oss. La stessa cosa vale per il rotore dei fisici

DIVERGENZA NULLA / UGUALE

→ Se $\text{div } \vec{E} = 0$, e l'insieme di definizione verifica una certa proprietà (*gratis ad esempio per insiemi stellati*) allora $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ per un opportuno vettore $\vec{F}$.

Dato $\vec{E}$, trovare $\vec{F}$, lo chiameremo problema di inversione del rotore.



→ Se $\text{div } \vec{E}_1 = \text{div } \vec{E}_2$, e l'inversione è fatta bene, allora

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_1 + \text{rot (qualcosa)}.$$

— o — o —

Oss. Per tutti questi operatori valgono formule "simili" a quelle per le derivate.

Esempio

$$\text{div}(\underbrace{f}_{\text{funzione}} \underbrace{\vec{E}}_{\text{vettore}}) = f \text{div}(\vec{E}) + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

$$\vec{E} = (A, B, C)$$

$$\text{div}(fA, fB, fC) = (fA)_x + (fB)_y + (fC)_z$$

$$= \underbrace{f_x A}_{\text{green}} + \underbrace{f A_x}_{\text{orange}} + \underbrace{f_y B}_{\text{green}} + \underbrace{f B_y}_{\text{orange}} + \underbrace{f_z C}_{\text{green}} + \underbrace{f C_z}_{\text{orange}}$$

$$= f \text{div}(\vec{E}) + \langle \nabla f, \vec{E} \rangle$$

Esercizio Trovare formula analoga per $\text{rot}(f\vec{E})$.

— o — o —