



Esempio 1 $\omega = \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$

Verifica chiusura: $A_y = \frac{x^2+y^2 - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$B_x = \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$

Sono diverse, quindi non è chiusa, quindi non è nemmeno esatta.

Esempio 2 $\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$

$A_y = + \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$B_x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$



È chiusa, ma essendo definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è detto che sia esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Proviamo ad integrare lungo la solita circ. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $0 \leq t \leq 2\pi$:

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\cos t}{1} (-\sin t) + \frac{\sin t}{1} \cdot \cos t \right\} dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Ci sta che sia esatta! In effetti lo è

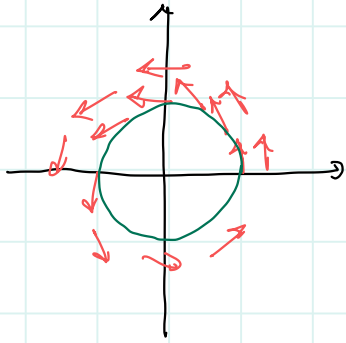
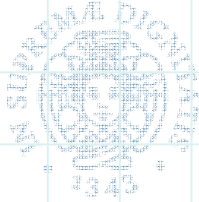
$V(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$ [Fare la verifica!!]

Fatto generale misterioso Se l'insieme di definizione ha s buchi, la forma ω è chiusa, e l'integrale di ω lungo una curva di contorno che ruota intorno a ciascuno degli s buchi viene 0, allora la forma è esatta su tutto l'insieme.

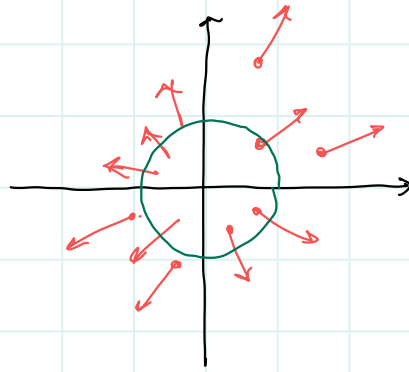
(cercando s curve, una per buco)



La solita vs esempio 2 come campi di vettori



$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$



$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dx + \frac{y}{x^2+y^2} dy$$

In entrambi i casi il campo $\vec{E} = (A, B)$ è costituito da vettori di norma 1.

Nel secondo caso il campo è CENTRIFUGO (e in effetti in ogni punto $\vec{E} \perp$ vettore tangente alla solita circonferenza)

Nel primo caso il campo è il secondo ruotato di 90° in verso antiorario (Algebra lineare!). (e in effetti in ogni punto $\vec{E}$ è parallelo al vettore tangente alla curva).

Interpretazione ciclistica Se faccio un giro in bici (curva chiusa) e ho sempre il vento contrario (o sempre favorevole) (cioè il prodotto scalare tra il tangente alla curva ed $\vec{E}$ ha un segno, positivo o negativo, fisso), allora la direzione del vento di sicuro non è il gradiente di un potenziale.

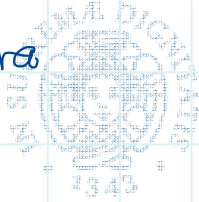
[Se fosse $\vec{E} = \nabla V$, allora l'integrale della forma lungo ogni curva chiusa sarebbe 0, ma questo è l'integrale del prodotto scalare tra $\vec{E}$ ed il tangente].

Esempio 3 Dire per quali valori di α la forma

$$(x+3y)e^{xy} dx + (y^2+dx)e^{xy} dy$$

è esatta (in questo caso su tutto $\mathbb{R}^2$)

Su tutto $\mathbb{R}^2$ l'isotermia è sostanzialmente equiv. alla chiusura
Impongo la chiusura!



$$A_y = 3e^{xy} + 3y \times e^{xy}$$

$$B_x = \alpha e^{xy} + \alpha xy e^{xy}$$

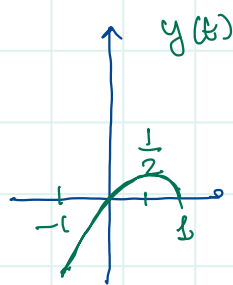
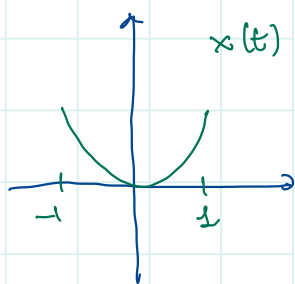
Quindi la forma è esatta $\Leftrightarrow \alpha = 3$.

Per $\alpha = 3$ una primitiva è

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + 3e^{xy} + \frac{1}{3} y^3 \quad [\text{Fare la verifica!!}]$$

Esempio 4 Consideriamo la curva $\gamma(t) = (t^2, t-t^2)$ con $t \in [-1, 1]$
Studiare la semplicità e fare un disegno.

Vediamo separatamente le due componenti:



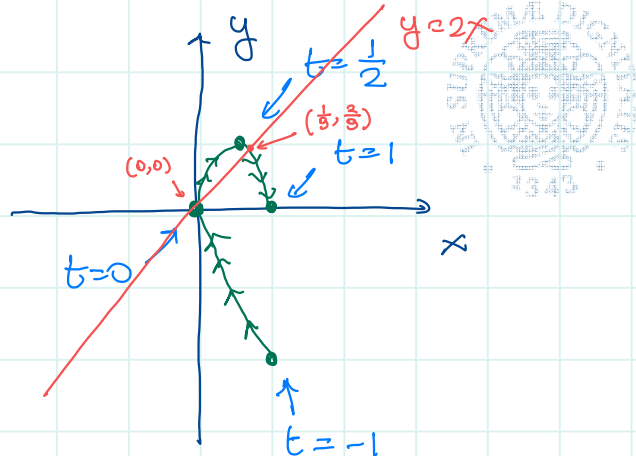
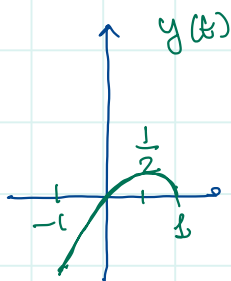
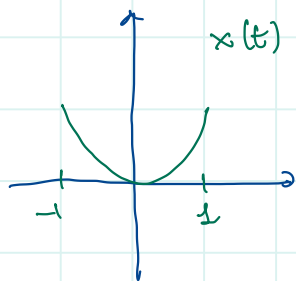
Brutta notizia: nessuna delle componenti è monotona, quindi la semplicità va fatta in altro modo.

1° modo Osservo che $x(t) + y(t) = t$, che è iniettiva $\Rightarrow$ semplice

2° modo Risolvo il sistema $t^2 = s^2$
 $t - t^2 = s - s^2$

Dalla prima otteniamo $t = s$ oppure $t = -s$. La prima ci sta bene.

La seconda porta a $-s - s^2 = s - s^2$, da cui $2s = 0$, cioè $s = 0$
e $t = -s = 0$, quindi in realtà ancora $t = s$.



Per $-1 \leq t \leq 0$ abbiamo che x decresce e y cresce $\nwarrow$

Per $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ abbiamo che x cresce e y cresce $\nearrow$

Per $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ abbiamo che x cresce e y decresce $\searrow$

Altra domanda: calcolare l'intersezione/i tra la curva e la retta $y = 2x$.

Basta risolvere $y(t) = 2x(t)$, cioè $t - t^2 = 2t^2$, cioè $3t^2 = t$, cioè

$$t=0 \rightsquigarrow (0,0)$$

$$t = \frac{1}{3} \rightsquigarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}\right)$$

Se volessi le intersezioni con $y = x^2$ basterebbe risolvere

$$t - t^2 = (t^2)^2.$$

— 0 — 0 —