



LA SOLITA Consideriamo la forma diff.

$$\omega = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

Questa è definita in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

La forma è CHIUSA. Infatti

$$A_y = -\frac{x^2+y^2 - 2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{x^2+y^2 - 2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

😊

Sarà esatta? Essendo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ NON sempl. connesso (infatti c'è un buco), dal teorema generale non si può dire nulla.

La forma non è esatta. Come si dimostra che una forma non è esatta?

Ci sono almeno due modi

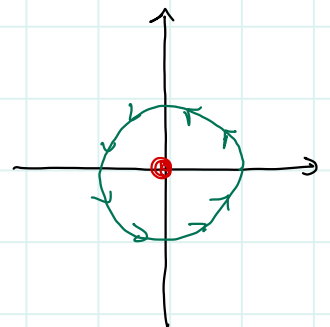
→ si fa vedere che non è chiusa (ma qui non funziona)

→ si trova una curva $\gamma(t)$ chiusa sulla quale l'integrale di ω è $\neq 0$ (se una forma è esatta, l'integrale su ogni curva chiusa si annulla).

Prendiamo $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^{2\pi} \left\{ \underbrace{-\frac{\sin t}{1}}_{-\frac{y}{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{(-\sin t)}_{\dot{x}(t)} + \underbrace{\frac{\cos t}{1}}_{\frac{x}{x^2+y^2}} \underbrace{\cos t}_{\dot{y}(t)} \right\} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi \neq 0$$

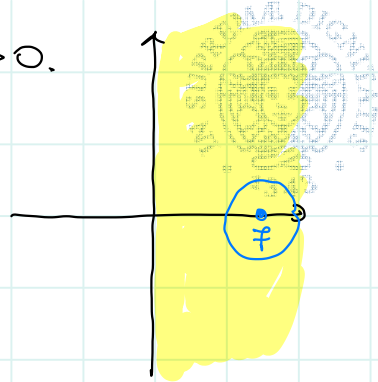


Oss. 1 Se considero w come definita solo per $x > 0$.

Ora la zona di def. è addirittura convessa, e in particolare sempl. convessa.

Quindi essendo w chiusa, w sarà per forza esatta in questa zona !!!

In particolare esiste $\forall$ definita per $x \geq 0$ a valori reali b.c.



$$V_x = A \quad \text{e} \quad V_y = B$$

Ad esempio $V(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ ↗ non crea problemi avendo preso $x > 0$

$$V_x = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

e analogamente per V_y .

circ. con centro in $(7,0)$
e raggio 1
↑

In particolare, se integro lungo la curva $\gamma(t) = (7 + \cos t, \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, so già che l'integrale viene nullo !!

Lo stesso discorso vale nel semipiano $x < 0$, con la stessa primitiva!

Il discorso vale anche nei semipiani $y > 0$ e $y < 0$.
Questa volta una possibile primitiva è

$$V(x,y) = -\arctan \frac{x}{y}$$

Infatti

e idem per V_y

$$V_x(x,y) = \frac{-1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

Oss.2 L'esempio precedente mostra che una forma può

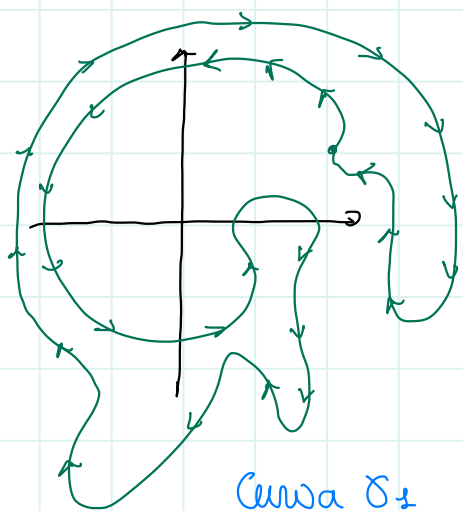
→ essere esatta in un certo insieme A

→ " " " " " " " " B

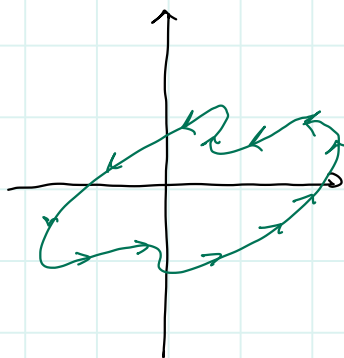
→ NON essere esatta in $A \cup B$

(L'esattezza, al contrario della chiusura, è una proprietà GLOBALE).

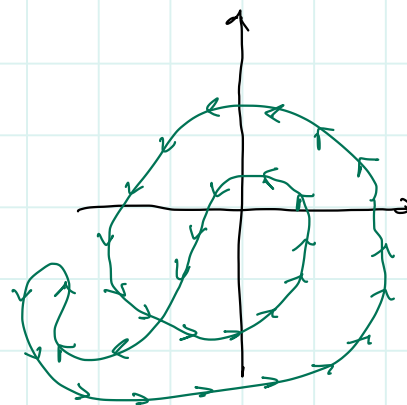
Oss.3 Calcolare l'integrale di ω sulle curve indicate in figura



Curva γ_1



Curva γ_2



Curva γ_3

$$\int_{\gamma_1} \omega = 0$$

$$\int_{\gamma_2} \omega = 2\pi$$

$$\int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$$

Questo perché l'unica cosa che conta è "quante volte la curva gira intorno al buco",

Essendo la forma, l'integrale su due curve coincide se due curve possono essere trasformate l'una nell'altra in maniera continua "senza strappi" e restando nella zona di definizione.

→ la curva γ_1 si può trasformare in una curva contenuta nel semipiano $x > 0$, o anche in una curva costante

→ la curva γ_2 si può trasformare in $(\cos t, i \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$, per cui abbiamo già fatto il conto.

→ la curva γ_3 si può trasformare in $(\cos t, i \sin t)$ con $t \in [0, 4\pi]$, quindi l'integrale è il doppio del precedente.

Oss. 4 Ogni altra forma diff. che sia CHIUSA e NON ESATTA
su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ è del tipo

$$\omega = \underbrace{\omega_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{forma} \\ \text{esatta}}} + \lambda \underbrace{\omega_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{la solita}}}$$

Morale: la solita è in un certo senso l'UNICO esempio.

Idea: data una qualunque ω che sia chiusa ma non esatta,
sceglio λ in modo tale che

$$\int_{\gamma} \omega = \lambda 2\pi \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{integrale della solita} \\ \text{lungo la solita circonferenza} \end{array}$$

$\uparrow$ solita circonferenza

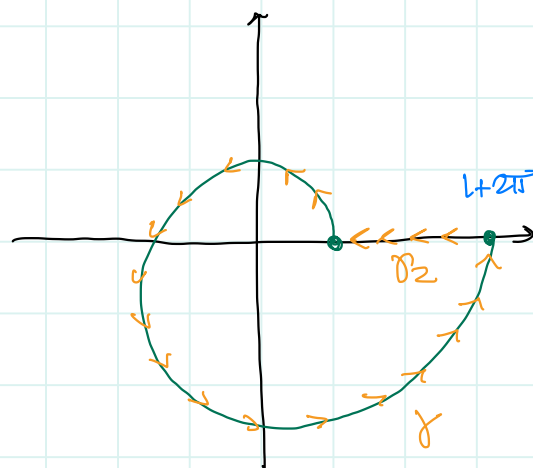
A questo punto osservo che, se pongo $\omega_1 = \omega - \lambda \omega_2$
allora ω_1 ha integrale nullo lungo tutte le curve CHIUSE, anche
quelle che girano intorno al buco, quindi ω_1 è esatta.

Oss. 5 Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ dove $\gamma(t) = ((1+t)\cos t, (1+t)\sin t)$
con $t \in [0, 2\pi]$

Osserviamo che γ , intanto che gira, si
allontana dall'origine.

1° modo Uso la definizione --

2° modo Dopo aver percorso γ , torno in
partenza lungo la rettilinea.



Considero quindi $\gamma_1(t) = (1+t, 0)$ con $t \in [0, 2\pi]$
e definisco γ_2 come γ_1 percorsa al contrario.

Adesso

$$2\pi = \int_{\gamma \cup \gamma_2} \omega \quad \text{perché } \gamma \cup \gamma_2 \text{ è equivalente ad un giro} \\ \text{singolo intorno al buco}$$

$$= \int_{\gamma} \omega - \int_{\gamma_1} \omega \quad \text{perché } \gamma_2 \text{ è fare } \gamma_1 \text{ al contrario.}$$

Ma allora

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= 2\pi + \int_{\gamma_1} \omega \\ &= 2\pi + \int_0^{2\pi} \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nullo per "colpa"} \\ \text{di } y \text{ al numeratore}}}{0} \cdot \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{x(t)^2 + y(t)^2} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \dot{y}(t)}}{0} \right\} dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

[Usare la definizione come esercizio].

— o — o —

