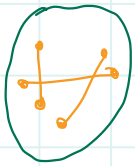


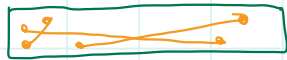
Sotto quali ipotesi CHIUSA $\Rightarrow$ ESATTA

Sia Ω un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (o in generale $\mathbb{R}^n$),

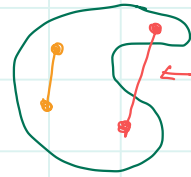
Si dice che Ω è **CONVESSO** se, per ogni coppia punti P e Q di Ω , tutto il segmento PQ è contenuto in Ω .



SI CONVESSO



SI CONVESSO



← qui gli estremi stanno in Ω , ma segmento NO

NO CONVESSO

Si dice che Ω è **STELLATO** se esiste $P \in \Omega$ tale che, per ogni Q in Ω , tutto il segmento PQ è contenuto in Ω .

(ora P è fisso e varia solo Q . Brutalmente: un guardiano posto in P sorveglia tutto Ω .)



SI STELLATO



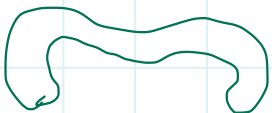
questo vede tutto Ω



Non so dove mettere il sorvegliante

NO STELLATO

Si dice che Ω è **CONNESSO** se è fatto da un pezzo solo



SI CONNESSO

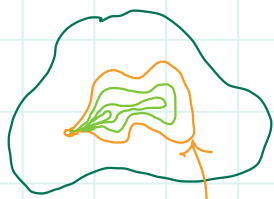
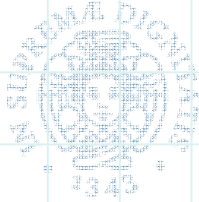


SI CONNESSO



INSIEME NO CONNESSO

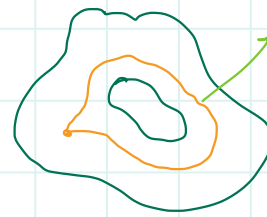
Si dice che Ω è **SEMPLICEMENTE CONNESSO** se ogni curva chiusa a valori in Ω può essere deformata fino ad ottenere una curva che resta costante in un punto.



curva chiusa
data

(posso tirare il cordino
fino a farlo "sparire"
in un punto)

SI SEMPL. CONNESSO



se non posso
tagliare, resta
incastrato dal
buccia

NO SEMPL. CONNESSO

Brutalmente: semplicemente connesso vuol dire "senza buchi".

Oss. In 3 dimensioni

→ $\mathbb{R}^3$ meno una sferetta è sempl. connesso? **SI**

→ $\mathbb{R}^3$ meno una retta è sempl. connesso? **NO** (una corda che
gira attorno alla retta non
si spila)

Oss. Valgono le implicazioni

CONNESSO $\Rightarrow$ STELLATO $\Rightarrow$ SEMPL. CONN. $\Rightarrow$ CONNESSO

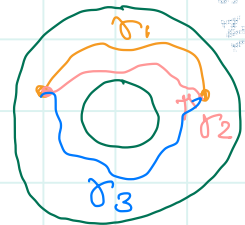
Teorema misterioso 1 Se ω è chiusa e Ω insieme su cui è
definita è sempl. connesso, allora ω è
esatta.

Teorema misterioso 2 Se ω è chiusa, e γ_1 e γ_2 sono due curve
OMOTOPE (cioè si possono trasformare l'una nell'altra lasciando
fissi gli estremi e restando nella zona di def. di Ω), allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Commento sull'ipotesi Supponiamo che Ω insieme di definizione di ω sia una corona circolare.

Consideriamo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ come in figura.



Allora

→ γ_1 e γ_2 sono omotope

→ γ_1 e γ_3 non sono omotope, e nemmeno γ_2 e γ_3

TRE STRATEGIE PER CALCOLARE L'INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. SU UNA CURVA

(con giorno ce ne sarà una quarta)

Devo calcolare $\int_{\gamma} \omega$. Come posso fare?

1° modo Uso direttamente la definizione

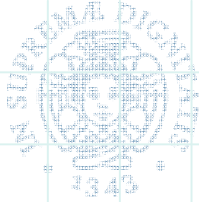
2° modo Spero che la forma sia esatta (magari dimostro l'esattezza usando il teo. mist. 1), poi calcolo una prima e faccio la differenza tra i valori agli estremi

3° modo Spero che la forma sia chiusa, e poi sostituisco la curva data con una nuova curva (magari più semplice) che sia omotopa a quella data, e poi calcolo l'integrale su questa nuova curva (per il teo. mist. 2 coincide con quello richiesto).

Esempio 1 $\omega = y dx + z dy + x dz$ in $\mathbb{R}^3$. È esatta?

$$\begin{array}{llll} A_y = B_x & 1 = 0 & \text{NO!} & \therefore \Rightarrow \text{NO chiusa} \\ A_z = C_x & & & \Rightarrow \text{NO esatta} \\ B_z = C_y & & & \end{array}$$

Esempio 2 $\omega = x dx + y dy + z dz$ in $\mathbb{R}^3$. È esatta?



Controlliamo la chiusura. Le 3 verifiche danno tutte 0=0, quindi ω è chiusa ☺. Questa è definita su $\mathbb{R}^3$ che è addirittura connesso, quindi pure sempl. connesso.

Quindi è pure esatta ☺.

Una primitiva si vede a occhio

$$V = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)$$

Esempio 3 $\omega = y^2 dx + 2xy dy$ È esatta?

Controlliamo la chiusura: $A_y \stackrel{?}{=} B_x \leadsto 2y = 2y$ ☺

È chiusa, ed essendo definita su $\mathbb{R}^2$ è pure esatta.

Una primitiva è

$$V(x, y) = xy^2 \quad (\text{sempre da verificare!})$$

Esempio 4 $\omega = y^2 dx + (2xy + e^{-y^2}) dy$
 $\gamma(t) = (t^2, t^2 - t) \quad t \in [0, 1]$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

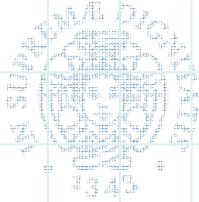
3° modo Uso la def.

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \left\{ \underbrace{(t^2 - t)^2}_{y^2} \cdot \underbrace{2t}_{\dot{x}} + \left(\underbrace{2t^2}_{2x} \underbrace{(t^2 - t)}_y + \underbrace{e^{-(t^2 - t)^2}}_{e^{-y^2}} \right) \cdot \underbrace{(2t - 1)}_{\dot{y}} \right\} dt$$

= rinuncio ☹

2° modo Spero sia esatta.

Controllo la chiusura: $A_y \stackrel{?}{=} B_x$ no $2y = 2y$ ☺



Essendo definita su $\mathbb{R}^2$ è pure esatta. Una primitiva è

$$V(x,y) = xy^2 + ??$$

↑ deve avere come derivata e^{-y^2}
e non lo so trovare ☹

3° modo Essendo la forma chiusa, posso usare una curva omeotopa a δ con gli stessi estremi

Basta usare il segmento congiungente !!

$$\delta_1(t) = (t, 0) \text{ con } t \in [0, 1]$$

$$\int_{\delta_1} \omega = \int_0^1 \underbrace{0}_{y^2} \cdot \underbrace{1}_{x'} + \underbrace{1}_{2xy + e^{-y^2}} \cdot \underbrace{0}_{y'} = 0 \text{ ☺}$$

