



FORME DIFFERENZIALI ESATTE E CHIUSE

Def. Una forma diff. $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ si dice ESATTA se esiste una funzione $V(x,y)$ tale che

$$A(x,y) = V_x(x,y)$$

$$B(x,y) = V_y(x,y)$$

In altre parole

$$\vec{E}(x,y) = \nabla V(x,y)$$

La funzione V si dice PRIMITIVA o POTENZIALE.

In 3 variabili richiediamo

$$A = V_x, \quad B = V_y, \quad C = V_z$$

Def. (2 variabili) $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ si dice CHIUSA se
(le derivate in croce sono uguali)

$$A_y(x,y) = B_x(x,y)$$

(3 variabili) Stessa cosa, ma ora le derivate in croce sono 3,
cioè

$$\omega = A dx + B dy + C dz$$

$$A_y = B_x$$

$$A_z = C_x$$

$$B_z = C_y$$

Oss. Per essere chiusa una forma deve essere con i coeff. che ammettono le deriv. parziali coinvolte.

RAPPORTI CHIUSURA - ESATTEZZA



- ① Esatta $\Rightarrow$ chiusa (purché i coeff. di ω siano differenziabili)
- ② Chiusa $\Rightarrow$ esatta SOLO IN CASI SPECIALI

Dim ① Supponiamo ω esatta, cioè $A = F_x$ e $B = F_y$.
Allora

$$\left. \begin{array}{l} A_y = (F_x)_y = F_{xy} \\ B_x = (F_y)_x = F_{yx} \end{array} \right\} \text{sono uguali perché derivate} \\ \text{parziali miste}$$

In 3 variabili è uguale: $A = F_x$, $B = F_y$, $C = F_z$

$$A_y = B_x \quad (F_x)_y = (F_y)_x \quad \checkmark$$

$$A_z = C_x \quad (F_x)_z = (F_z)_x \quad \checkmark$$

$$B_z = C_y \quad (F_y)_z = (F_z)_y \quad \checkmark$$

Oss. In particolare $\omega \text{ NON CHIUSA} \Rightarrow \omega \text{ NON ESATTA}$

(se fosse esatta, allora sarebbe chiusa!)

Quindi se fallisce la chiusura, allora abolio primitiva

Se non fallisce la chiusura, occorre vedere se siamo nei casi speciali di cui al pto 2 di prima

— o —

CONSEGUENZA FONDAMENTALE DELL'ESATTEZZA

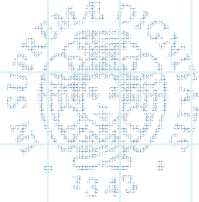
Proposizione Se ω è esatta e V è una sua primitiva, allora per ogni curva vale

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

→ i fisici direbbero
"il campo è
conservativo"

Morale: per calcolare l'integrale lungo una curva, basta fare la differenza tra i valori di una primitiva agli estremi, cioè, prudentemente da dove passa la curva

Dim (In 2 variabili, ma si generalizza facilmente)



$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \underbrace{\{ V_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + V_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \}}_{\frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) \text{ per la CHAIN RULE}} dt$$

$\frac{d}{dt} V(x(t), y(t))$ per la CHAIN RULE

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(x(t), y(t)) dt$$

$$= V(x(b), y(b)) - V(x(a), y(a))$$

integrale di una
derivata

$$= V(\gamma(b)) - V(\gamma(a))$$

— 0 — 0 —

Esempio 1 $\omega = x dx + y dy$

$$\gamma(t) = (\sin t \cdot \arctan(t^3), \sin^3(t)) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

1° modo Uso la definizione

$$\int_0^{2\pi} \{ (\sin t \cdot \arctan(t^3)) \cdot [\sin t \cdot \arctan(t^3)]' + \sin^3 t \cdot (\sin^3 t)' \} dt$$

= auguri !! ☺

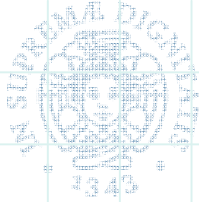
2° modo Osservo che la forma è esatta e una primitiva è

$$V(x, y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \quad (\text{Fare la verifica!})$$

Osservo che $\gamma(0) = (0, 0) = \gamma(2\pi)$. Quindi

$$\int_{\gamma} \omega = V(0, 0) - V(0, 0) = 0 \quad (\text{non serve nemmeno calcolare la primitiva})$$

Caratterizzazioni dell' esattezza



Teorema Sia ω una forma differenziale.

Allora i seguenti fatti sono equivalenti:

(i) ω è esatta (cioè ammette una primitiva)

(ii) per ogni curva γ chiusa si ha che $\int_{\gamma} \omega = 0$

(iii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 , se hanno gli stessi estremi cioè $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$ e $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$, allora

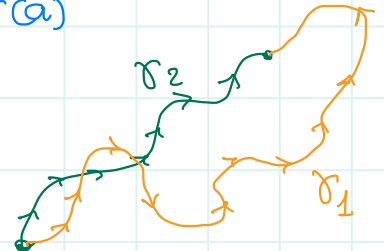
$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dim (i) $\Rightarrow$ (ii) Questo segue dalla Prop. precedente in quanto

$$\int_{\gamma} \omega = V(\gamma(b)) - V(\gamma(a)) = 0$$

$\uparrow$ uso hp (i) $\uparrow$ ovvio se $\gamma(b) = \gamma(a)$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Siano γ_1 e γ_2 due curve con gli stessi estremi



Costruisco la curva γ_3 ottenuta percorrendo prima γ_1 e poi γ_2 al contrario. Quindi γ_3 è chiusa, ma allora

$$0 = \int_{\gamma_3} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2 \text{ al contrario}} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

$\uparrow$ hp (ii) $\uparrow$ Facendo al contrario, il segno cambia

$$\text{Quindi } \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Devo definire la primitiva.

Scelgo (x_0, y_0) e per ogni (x, y) definisco

$$V(x, y) = \int \omega$$

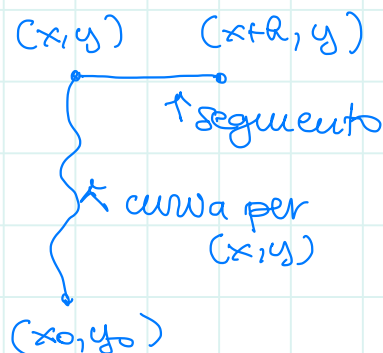
$\int$ $\uparrow$ curva qualunque che unisce (x_0, y_0) e (x, y)

(per hp (ii) il valore non dipende dalla curva)

Devo dimostrare che $V_x = A$ e $V_y = B$. Uso la definizione di derivata parziale

$$\frac{1}{R} [V(x+R, y) - V(x, y)] =$$

Per calcolare $V(x+R, y)$ uso la curva che usavo per (x, y) e poi proseguo lungo il segmento



segmento = $(x+t, y)$
con $t \in [0, R]$

$$= \frac{1}{R} \int_{\text{segmento}} \omega$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^R A(x+t, y) \overset{\uparrow x}{1} + B(x+t, y) \cdot \overset{\uparrow y}{0} dt$$

$$= \frac{1}{R} \int_0^R A(x+t, y) dt = \frac{1}{R} \cdot \cancel{R} \cdot A(x+c, y)$$

$\uparrow$ teorema medio integrale

$\uparrow$ p.to misterioso tra 0 e R

Ora basta osservare che, quando $R \rightarrow 0$, anche $c \rightarrow 0$ e quindi $A(x+c, y)$ tende ad $A(x, y)$.

Stesso discorso per la 2^a componente.

— o — o —