



FORME DIFFERENZIALI

In 2 variabili una forma differenziale si presenta nella forma

$$\omega = A(x, y) dx + B(x, y) dy$$

↑
omega piccolo

dove $A(x, y)$ e $B(x, y)$ sono due funzioni date, che si chiamano COEFFICIENTI della forma.

In 3 variabili è analogo, solo con 3 coeff.

$$\omega = A(x, y, z) dx + B(x, y, z) dy + C(x, y, z) dz$$

In n variabili più in generale

$$\omega = \sum_{k=1}^n A_k(x) dx_k$$

↑
vettore

Esempi

$$\omega = (x^2 + y^2) dx + yx dy$$

$$\omega = x dx + y dy$$

$$\omega = dy$$

↑ in questo caso $A(x, y) \equiv 0$
 $B(x, y) \equiv 1$

$$\omega = z dx + y dz + x dy$$

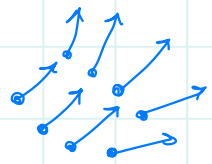
$$\omega = x^2 dx + (x+y) dy + (z^2 + \cos x) dz$$

Brutalmente, ω è una maniera buffa di scrivere i 2/3 coefficienti

CAMPI DI VETTORI

Data $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$
possiamo pensare che in ogni p.to (x,y) del piano sia applicato un vettore

$$\vec{E}(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$



In questo modo si ottiene quello che si chiama campo di vettori

Possiamo pensare IN PRIMA APPROSSIMAZIONE che una forma diff. e un campo di vettori siano la stessa cosa.
Matematicamente NON È COSÌ, ma comunque rende l'idea e salva l'intuizione.

INTEGRALE DI UNA FORMA DIFF. LUNGO UNA CURVA

1 Notazione

$$\int_{\gamma} \omega$$

↑
curva a
valori in $\mathbb{R}^n$

↑ forma in $\mathbb{R}^n$, con i coeff.
definiti almeno sul sostegno
della curva

2 Definizione e calcolo

Supponiamo $n=2$

$$\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \text{ con } t \in [a,b]$$

Supponiamo che $x(t)$ e $y(t)$ siano di classe C^1 , o almeno derivabili. Allora si pone

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t)\} dt$$

Brutalmente: $dx = \dot{x}(t)dt$ e $dy = \dot{y}(t)dt$

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \left\{ \sum_{k=1}^n A_k(\gamma(t)) \dot{x}_k(t) \right\} dt$$

Esempio 1

$$\omega = (x+ty)dx - x^2dy$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3) \quad t \in [0, 1]$$

Allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_0^1 \{ (t^2+t^3) \underset{\uparrow \dot{x}(t)}{2t} - t^4 \cdot \underset{\uparrow \dot{y}(t)}{3t^2} \} dt = \text{si fa}$$

$$\int_{\gamma} x dy = \int_0^1 \underset{\uparrow x(t)}{t^2} \cdot \underset{\uparrow \dot{y}(t)}{3t^2} dt = \text{si fa}$$

$$\boxed{\int_{\gamma} x ds}$$

integrale curvilineo
della FUNZIONE x

$$= \int_0^1 \underset{\uparrow x(t)}{t^2} \underbrace{\sqrt{4t^2 + 9t^4}}_{\text{speed} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} dt$$

[2] Significato fisico Sia E il campo di vettori associato alla forma $\omega = A dx + B dy$

Supponiamo di essere nel "caso banale", cioè

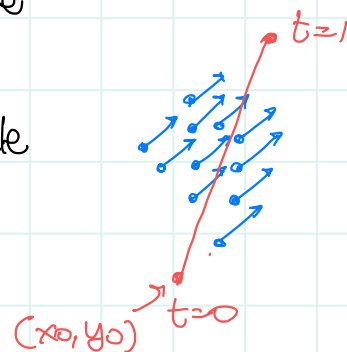
→ E costante (quindi A e B costanti)

→ $\gamma(t)$ percorre un segmento a velocità costante

$$x(t) = x_0 + t v_1$$

$$t \in [0, 1]$$

$$y(t) = y_0 + t v_2$$



Allora facendo il conto troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_0^1 (A \cdot v_1 + B \cdot v_2) dt = A v_1 + B v_2 \\ &= \underset{\uparrow \text{Forza}}{\langle A, B \rangle} \cdot \underset{\uparrow \text{spostamento}}{\langle v_1, v_2 \rangle} \end{aligned}$$

= lavoro compiuto dalla forza $\vec{E}$ sul punto materiale che si sposta lungo la curva.

Se la curva non è un segmento e il campo non è costante, possiamo come al solito prendere una partizione di $[a, b]$

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

poi approssimare

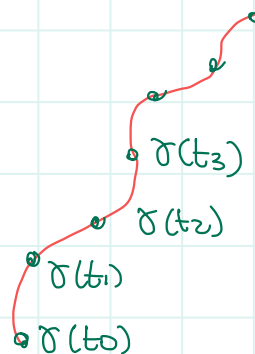
→ la curva con la spezzata per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_n)$

→ il campo con una costante in ogni tratto

poi fare la somma

$$\sum_{k=1}^n \langle \vec{E}(\gamma(t_k)), \underbrace{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}_{\substack{\uparrow \text{spostamento} \\ \text{(vettore!) nel} \\ k\text{-esimo tratto}}} \rangle$$

$\uparrow$
campo nel
1° estremo
del k -esimo
tratto



$$= \sum_{k=1}^n A(x(t_k), y(t_k)) \cdot \underbrace{(x(t_k) - x(t_{k-1}))}_{(t_k - t_{k-1}) \dot{x}(s_k)} + B(\dots) \cdot \underbrace{(y(t_k) - y(t_{k-1}))}_{(t_k - t_{k-1}) \dot{y}(s_k)}$$

$$= \sum_{k=1}^n \{ A(x(t_k), y(t_k)) \dot{x}(s_k) + B(\dots) \dot{y}(s_k) \} (t_k - t_{k-1})$$

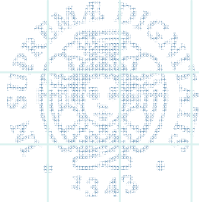
Quando la partizione diventa sempre più fine, la somma tende all'integrale della definizione.

Oss. Ho applicato il teo. Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a) \varphi'(c)$$

$\uparrow$
p.to mist. intermedio
tra a e b .

INTEGRALI DI FORME VS INTEGRALI DI FUNZIONI



$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \{ A(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + B(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \} dt$$

$$= \int_a^b \left\{ A(x(t), y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}} + B(\dots) \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dots}} \right\} \sqrt{\dots} dt$$

Se ora consideriamo il vettore

$$\vec{T}(t) = \left(\frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}, \frac{\dot{y}(t)}{\sqrt{\dots}} \right) \leftarrow \begin{array}{l} \text{VETTORE} \\ \text{TANGENTE} \\ \text{ALLA CORVA} \end{array}$$

allora

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} \underbrace{\langle \vec{E}(\sigma(t)), \vec{T}(t) \rangle}_{\substack{\text{prod. scalare tra} \\ \text{campo e vettore} \\ \text{tangente}}} ds \quad \uparrow \substack{\text{integrale di funzione}} \quad \uparrow$$

Oss. Per l'integrale curvilineo di funzioni

→ se cambio il verso di percorrenza del sostegno, l'integrale resta lo stesso

→ se percorro il sostegno avanti - indietro, l'integrale raddoppia

Per l'integrale curvilineo di forme diff.

→ se cambio il verso di percorrenza del sostegno, l'integrale CAMBIA DI SEGNO

→ se percorro il sostegno avanti indietro, i due contributi si cancellano

MORALE: l'integrale di forme ammette cancellazioni!

