

INTEGRALI CURVILINEI DI FUNZIONI

Integrale di una funzione
lungo una curva

- ① Come si calcolano
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Come si calcolano

1 Notazione

$$\int_{\gamma} f(x) ds$$

sempre singolo
 curva $\rightarrow \gamma$
 $f(x)$ $\uparrow$ vettore in $\mathbb{R}^n$
 ds $\uparrow$ vuol dire che è un integrale curvilineo

Si intende che

- $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una curva CONTINUA
- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione LIMITATA (se è continua, meglio!)
 $\uparrow$ basta che f sia definita sul supporto di γ

In 2 variabili

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds$$

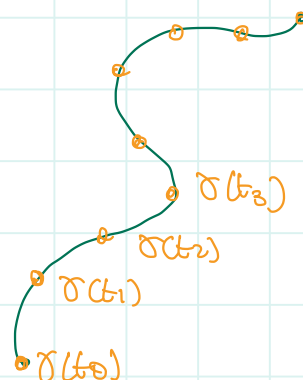
In 3 variabili

$$\int_{\gamma} f(x, y, z) ds$$

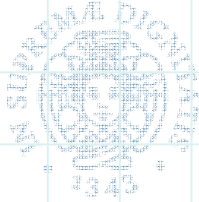
3 Idea della definizione Come da tradizione consideriamo una partizione di $[a, b]$:

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

e consideriamo la spezzata che passa per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$



Considerazioni le somme



$$\sum_{k=1}^n \underbrace{\| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \|}_{\substack{\text{lunghezza tratto} \\ i\text{-esimo spezzata}}} m_i$$

lunghezza tratto
i-esimo spezzata

$$\sum_{k=1}^n \| \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \| M_i$$

↑
max di
f nel tratto
(o inf)

dove m_i e M_i sono inf e sup di f nel tratto compreso tra $\gamma(t_{i-1})$ e $\gamma(t_i)$

Man mano che la partizione diventa più fitta, le somme tendono all'integrale.

[4] Formula per il calcolo se f è continua e γ è di classe C^1 , allora

$$\int_{\gamma} f(x) ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

↑ è l'integrale in $[a,b]$ di una funzione della sola t

In 2 variabili:

$$\int_{\gamma} f(x,y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

Esempio $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 2]$

$$f(x,y) = x$$

$$\int_{\gamma} x ds = \int_0^2 \underbrace{t}_{x(t)} \underbrace{\sqrt{1 + (2t)^2}}_{\text{speed}} dt = \int_0^2 t \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

= si fa

2) Significato geometrico

L'integrale curvilineo è l'integrale della funzione $\varphi(s)$ che rappresenta l'altezza a cui si trova l'auto dopo aver percorso un tratto di lunghezza s .

[Vedi video con GPS]

Caso speciale Se $f(x, y) \equiv 1$ costante, allora

$$\int_{\gamma} f(x, y) ds = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \text{lunghezza (curva)}$$

Oss. Se l'auto percorre 2 volte la stessa curva, anche andata e ritorno, l'integrale curvilineo **RADDOPPIA**

BARICENTRO DI UNA CURVA Data una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiamo baricentro il p.to $G = (x_G, y_G)$ con

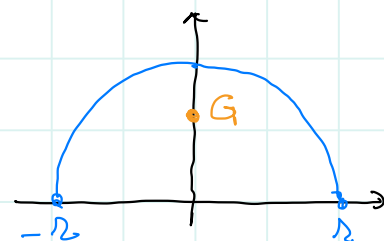
$$x_G = \frac{1}{\text{lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} x ds \quad y_G = \frac{1}{\text{lunghezza}(\gamma)} \int_{\gamma} y ds$$

Esempio (Baricentro della semicirconferenza)

Parametizziamo come

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t) \quad t \in [0, \pi]$$

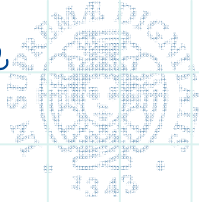
Allora $\text{lunghezza}(\gamma) = \pi r$. Ovviamente $x_G = 0$ per simmetria



$$\int_{\gamma} y ds = \int_0^{\pi} \underbrace{r \sin t}_{y(t)} \sqrt{\underbrace{r^2 \sin^2 t}_{\dot{x}(t)^2} + \underbrace{r^2 \cos^2 t}_{\dot{y}(t)^2}} dt = r^2 \int_0^{\pi} \sin t dt = 2r^2$$

$$\text{Quindi } y_G = \frac{2r^2}{\pi r} = \frac{2}{\pi} r \rightarrow \text{sopra la metà!!}$$

Se ero in vena di fare conti, potevo parametrizzare come



$$\gamma(t) = (t, \sqrt{r^2 - t^2}) \quad \text{con } t \in [-r, r]$$

$$\text{Così } \dot{x}(t) = 1, \quad \dot{y}(t) = \frac{-2t}{2\sqrt{r^2 - t^2}}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| = \left\{ 1 + \frac{t^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = \left\{ \frac{r^2}{r^2 - t^2} \right\}^{1/2} = r \frac{1}{\sqrt{r^2 - t^2}}$$

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_{-r}^r y(t) \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt = \int_{-r}^r \cancel{\sqrt{r^2 - t^2}} \frac{r}{\cancel{\sqrt{r^2 - t^2}}} \, dt = 2r^2$$

Potevo usare la stessa parametrizzazione anche per il calcolo della lunghezza!!

— o — o —

Casi speciali di lunghezza

Curve cartesiane

$$\gamma(t) = (t, f(t))$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $x(t) \quad y(t)$

$$\text{Lunghezza}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2} \, dt$$

Curve date in coordinate polari, cioè descritte fornendo

$\rho(t)$ e $\theta(t)$ per $t \in [a, b]$

Si intende che

$$x(t) = \rho(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = \rho(t) \sin \theta(t)$$

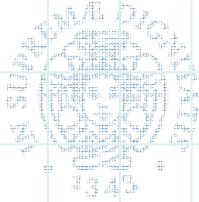
$$\dot{x}(t) = \dot{\rho}(t) \cos \theta(t) - \rho(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{\rho}(t) \sin \theta(t) + \rho(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t)$$

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \left\{ \dot{\rho}^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta + \dot{\rho}^2 \sin^2 \theta + \rho^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2\rho \dot{\rho} \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \right\}^{1/2}$$

Quindi

$$\|\dot{\sigma}(t)\| = \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2}$$



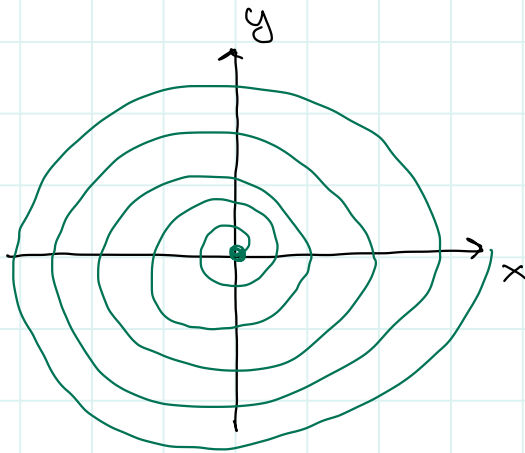
da cui

$$Lunghezza(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2 \dot{\theta}(t)^2} dt$$

Esempio

$\rho(t) = t$ $\theta(t) = t$ con $t \in [0, 10\pi]$

↗
è quella di cui
abbiamo fatto la
semplicità con
l'invariante



$$Lunghezza(\sigma) = \int_0^{10\pi} \sqrt{1+t^2} dt = \text{con un po' di fatica si fa } \infty.$$

— 0 — 0 —