



Esempio 1 $\gamma(t) = (t^2 + \cos(t^3), \cos(t^3)) \quad t \in [0, 15]$
 Determinare se è semplice.

Nessuna delle componenti è monotona, ma --

$$x(t) - y(t) = t^2$$

è monotona nell'intervallo $\Rightarrow \gamma$ è semplice ☺

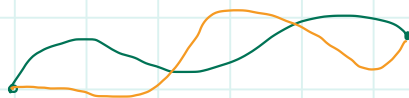
Esempio 2 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

1ª oss La curva è chiusa, in quanto $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0)$
 $\Rightarrow$ di sicuro non funzionano componenti o indici monotoni

Distinguiamo delle zone

- Per $t \in [0, \pi]$ la curva ha $x(t)$ decrescente e $y(t) \geq 0$.
 Quindi ristretta a $[0, \pi]$ è semplice!!
- Per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva ha $x(t)$ crescente e $y(t) \leq 0$.
 Quindi ristretta a $[\pi, 2\pi]$ è semplice!!

Achtung! NON HO ANCORA FINITO (semplice nel 1º pezzo e semplice nel 2º pezzo non basta per concludere semplice ovunque, perché un p.to del 1º pezzo potrebbe coincidere con un p.to del secondo)

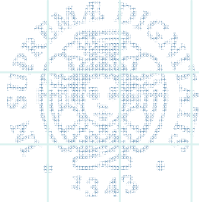


← qui ci sono intersezioni tra andata e ritorno

- Tuttavia all'andata $y(t) \geq 0$ e al ritorno $y(t) \leq 0$, quindi possono incontrarsi solo quando $y=0$, cioè $t=0, \pi, 2\pi$.
 Sostituendo troviamo incrocio quando $t=0$ e $s=2\pi$, ma sono gli estremi e sono consecutivi!

Esempio 2 bis
È semplice?

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 4\pi]$$



Il sostegno è quello di prima, solo che viene percorso 2 volte !!
Formalmente, devo trovare $t \neq s$ (NON ENTRAMBI estremi)
tali che $\gamma(t) = \gamma(s)$

$$\gamma(0) = \gamma(2\pi) = (1, 0) \quad \leftarrow \text{OK (il 2° NON è estremo)}$$

$$\gamma(0) = \gamma(4\pi) = (1, 0) \quad \leftarrow \text{NO (agli estremi è consentito)}$$

$$\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) = \gamma\left(\frac{5\pi}{2}\right) = (0, 1) \quad \leftarrow \text{OK}$$

Esempio 3 $\gamma(t) = (t-t^2, t-t^3)$ con $t \in [0, 1]$

Osserviamo che $\gamma(0) = \gamma(1) = (0, 0) \Rightarrow$ curva chiusa
 $\Rightarrow$ addio monotonia :)

Anche le zone non si vedono subito.

Imponiamo il sistema!

$$\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = t^2-s^2 \\ t-s = t^3-s^3 \end{cases} \quad \begin{cases} t-s = (t-s)(t+s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$$

Se $t=s$ ci va bene. Quindi supponiamo $t \neq s$ e dividiamo allegramente:

$$\begin{cases} t+s=1 \\ t^2+ts+s^2=1 \end{cases} \quad \begin{aligned} t &= 1-s \\ (1-s)^2 + (1-s)s + s^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$\cancel{1+s^2-2s+s-s^2+s^2=1} \rightsquigarrow s^2-s=0 \rightsquigarrow s(s-1)=0$$

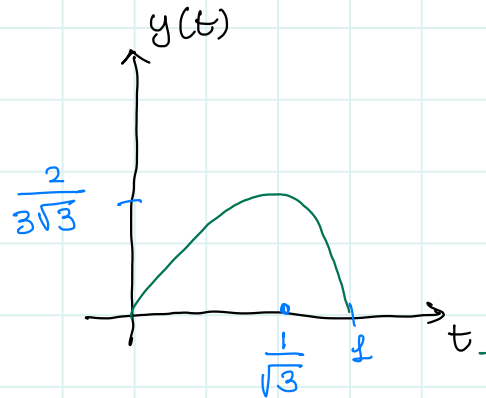
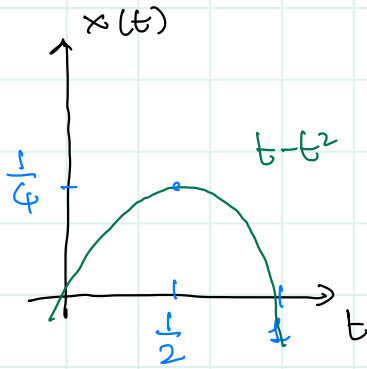
$$\nearrow s=0 \rightsquigarrow t=1$$

$$\searrow s=1 \rightsquigarrow t=0$$

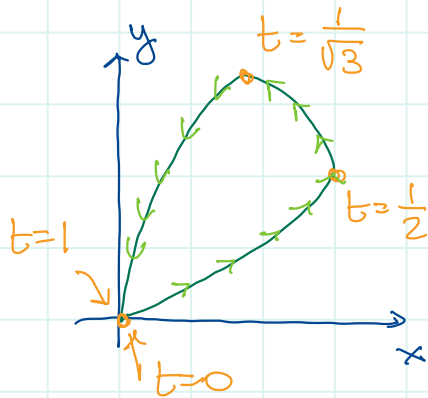
$\Rightarrow$ ci sono soluzioni con $t \neq s$,
ma sono proprio gli estremi
 $\Rightarrow$ la curva è semplice.

Facciamo il disegno del sostegno $\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \quad t \in [0,1]$

Disegno separatamente le componenti



$y'(t) = 1 - 3t^2$ si annulla per $t = \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$



- Per $t \in [0, \frac{1}{2}]$ crescono sia x sia y
- Per $t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ si ha che x decresce e y cresce
- per $t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1]$ si ha che x e y decrescono

— o — o —

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Setting: sia $\gamma: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una curva.

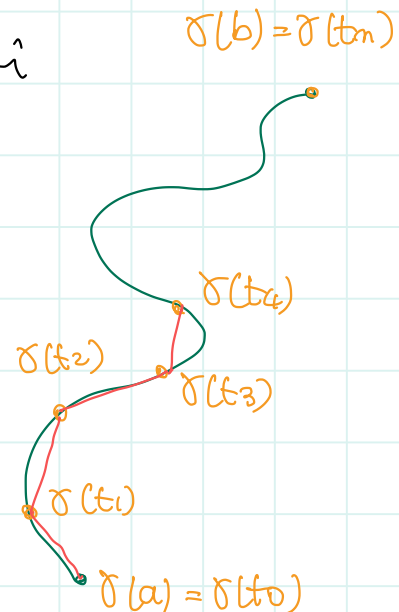
Una partizione di $[a,b]$ vuol dire scegliere punti

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = b$$

istanti intermedi

Consideriamo la poligonale che passa per $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \dots, \gamma(t_m)$. Questa avrà lunghezza

$$\sum_{k=1}^m \underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\text{lunghezza } i\text{-esimo tratto}}$$



Brutalmente: fotografare la posizione dell'oggetto ai tempi

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

poi unisco i punti e calcolo la lunghezza della spezzata (o poligonale).

Def. Si dice lunghezza della curva il sup delle lunghezze delle poligonali ottenute come sopra, al variare di tutte le possibili partizioni di $[a, b]$.

Oss. La lunghezza, essendo un sup, può venire un numero reale (≥ 0) oppure $+\infty$.

Oss. $\rightarrow$ Se due curve hanno lo stesso sostegno, hanno anche la stessa lunghezza?

No! Ad esempio la circ. percorsa 2 volte ha lunghezza doppia rispetto a quella percorsa una volta.

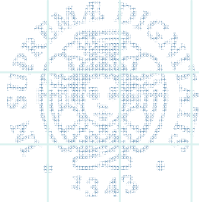
$\rightarrow$ Se due curve percorrono lo stesso sostegno una volta "in maniera continua", allora hanno la stessa lunghezza.

Come calcolo la lunghezza?

Teorema se σ è di classe C^1 (le componenti sono derivabili con derivata continua), allora

$$\text{Lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot{\sigma}(t)\|}_{\text{speed}} dt$$

Oss. La formula di sopra è una versione raffinata di



$$\text{spazio} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{speed}}}{\text{velocità}} \cdot \text{tempo}$$

In due variabili otteniamo

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt$$

In tre variabili otteniamo

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt$$

Esempio Se $\sigma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ con $t \in [0, 2\pi]$
allora

$$\dot{\sigma}(t) = (-r \sin t, r \cos t)$$

e quindi

$$\text{lunghezza}(\sigma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt = 2\pi r \quad \text{☺}$$

— 0 — 0 —