

**CURVE**

Def. Una curva a valori in $\mathbb{R}^n$ è una funzione

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

↑
1 variabile re
parametrizzata

↑
n variabili in ambito

Brutalmente, una curva descrive la posizione che occupa un punto al tempo t .

Indichiamo

$$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

↑ ↑ ↑
componenti di γ , che sono
tutte funzioni $x_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Def. Si dice **SOSTEGNO** della curva l'immagine della curva stessa
cioè

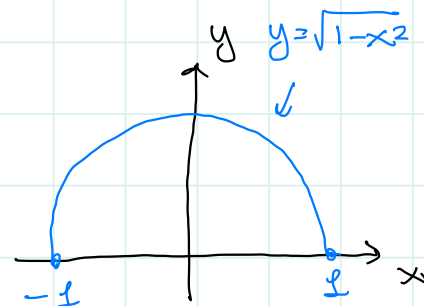
$$\text{sostegno}(\gamma) = \{ \gamma(t) : t \in [a, b] \} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Achtung! Non confondere mai una curva con il suo sostegno
Detto brutalmente

→ il sostegno è il "disegno della curva"

→ la curva è il modo in cui viene percorso.

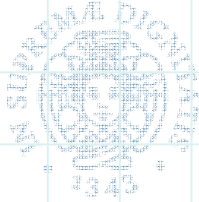
Esempio 1 La semicirconferenza in
figura è il sostegno di varie
curve diverse, ad esempio



$$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1] \quad \leftarrow \text{sensu orario}$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma(t) &= (\cos t, \sin t) & t &\in [0, \pi] \\ \gamma(t) &= (-t, \sqrt{1-t^2}) & t &\in [-1, 1] \end{aligned} \right\} \text{sensu antiorario}$$

Vettore e retta tangente



Supponiamo che le $x_i(t)$ siano derivabili in $[a, b]$.

Per ogni $t_0 \in [a, b]$ chiamiamo vettore tangente il vettore

$$\gamma'(t_0) = \dot{\gamma}(t_0) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_m(t))$$

Chiamiamo retta tangente la retta di equ. parametrica

$$\gamma(t_0) + t \dot{\gamma}(t_0)$$

↑
parametro

vettore nullo

Questa è ben definita se $\dot{\gamma}(t_0)$ esiste ed è $\neq 0$

Discorso fisico ma non solo : occhio alla differenza tra

→ VELOCITY, cioè $\dot{\gamma}(t_0) \leftarrow$ vettore

→ SPEED, cioè $\|\dot{\gamma}(t_0)\| \leftarrow$ numero

Esempio Consideriamo $\gamma(t) = (t, t^2)$ con $t \in [0, 3]$.

Scrivere l'eq. cartesiana della retta tangente per $t=2$

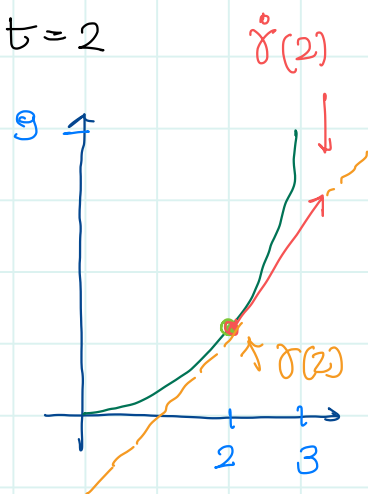
Calcoliamo $\gamma(2) = (2, 4)$

$$\dot{\gamma}(t) = (1, 2t)$$

$$\dot{\gamma}(2) = (1, 4)$$

↑ ↑ deriv. delle componenti

Retta tangente in parametrica



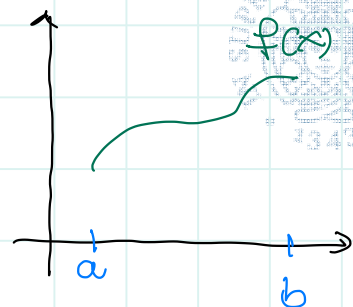
$$\gamma(2) + t \dot{\gamma}(2) = (2, 4) + t (1, 4) = \underset{\text{"x"}}{(2+t), \underset{\text{"y"}}{4+4t}}$$

$$t = x - 2, \quad y = 4 + 4t = 4 + 4(x - 2) = 4x - 4$$

Curve cartesiane Sono curve del tipo

$$\gamma(t) = (t, f(t)) \quad \text{con } t \in [a, b]$$

La prima componente è t



Il sostegno è il pezzo di grafico di $y = f(x)$ con $x \in [a, b]$.

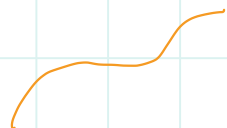
Il sostegno viene percorso da sx verso dx.

Def. Una curva $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ si dice

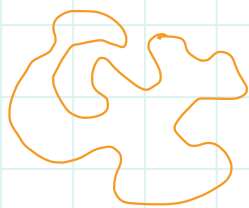
- chiusa se $\gamma(a) = \gamma(b)$ (arriva dove era partita)
- semplice se è iniettiva, tranne al più agli estremi, cioè
 $\gamma(t) \neq \gamma(s)$ se $t \neq s$

tranne al più eventualmente se t ed s sono gli estremi dell'intervallo

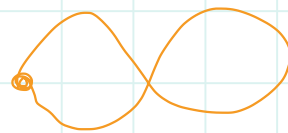
(bruttalmente: una curva è semplice se non torna su se stessa, tranne al più agli estremi)



semplice



semplice



no semplice

Come capisco se una curva è chiusa? Basta sostituire gli estremi $\hat{=}$

Come capisco se una curva è semplice? È complicato !!

Teoricamente devo impostare il sistema $\gamma(t) = \gamma(s)$ (in generale è un sistema di n equazioni) e dedurre che $t=s$, oppure t ed s sono gli estremi.

Ci sono almeno 3 scorciatoie !

- trovare una componente stret. monotona
- trovare un invariante monotono stret.
- distinguere le zone

Ultima risorsa

- risolvere il sistema

} Non fuizio
vanno se $\delta =$
è chiusa

Esempio 1 $\gamma(t) = (t^2, \sin t, \underset{\uparrow \uparrow}{t^3+1}) \quad t \in [-4, 4]$

III) simple perché la 3^a componente è crescente

(quindi la curva non può tornare su se stessa, in quanto la 3^a componente non torna indietro)

Esempio 2 $\sigma(t) = (\arctan t, t^2 - t^4)$ $t \in [-7, 7]$

$\uparrow \quad \uparrow$
è monofona

Anche in questo caso $\sigma(t)$ è semplice (e non chiusa)

Esempio 3 $\gamma(t) = (\sin t, t^8)$ $t \in [1, 5]$

La curva è semplice perché t^8 è CRESCENTE in $[1, 5]$

Esempio 4 $\gamma(t) = (\cos t, t^8)$ $t \in [-1, 1]$

Questa curva NON è semplice.

Entrambe le componenti sono PARI, quindi ad esempio

$\sigma(\frac{1}{2}) = \sigma(-\frac{1}{2})$ (Fatto generale: per negare la semplicità, basta trovare anche un solo punto di autointersezione)



Oss. Nell'esempio precedente

→ $\gamma(1) = \gamma(-1)$, ma non andavano bene per escludere la semplicità, essendo già estremi

→ se fosse stato $t \in [-100, -37]$, allora $\gamma(t)$ sarebbe stata semplice (t^2 è decrescente nell'intervallo).

Esempio 5 $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t)$ con $t \in [10, 70]$

Prese singolarmente le componenti non sono monotone.

Tuttavia

$$x(t)^2 + y(t)^2 = t^2$$

↑ monotona nell'intervallo

Avere trovato una "combinazione" di $x(t)$ e $y(t)$ che risulta monotona, quindi iniettiva, rende tutta la curva iniettiva!

Se fosse $\gamma(s) = \gamma(t)$, cioè $x(s) = x(t)$ e $y(s) = y(t)$, allora sarebbe $s^2 = t^2$, dunque $s = t$!!!

Brutalmente: in questo caso è monotona la p.

— o — o —