



Esempi "delicati"

Esempio 1 Sia $Q = [0, 1]^2$. Calcolare $\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$
 (valor medio in Q della distanza dall'origine)

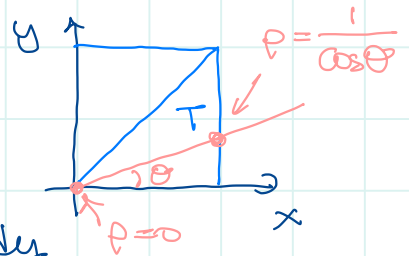
Conflitto: la funzione è bella in coord. polari
 Q insieme è bello in coord. cartesiane

3° modo Integrare la radice in coord. cartesiane (si fa ad AM1)

2° modo Provare con le polari.

Per simmetria

$$\iint_Q \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = 2 \iint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$$



quindi basta descrivere T in coord. polari

Dove varia θ ? $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Dove varia ρ ? Abbiamo $x \leq 1$, cioè $\rho \cos \theta \leq 1$, cioè $\rho \leq \frac{1}{\cos \theta}$

$$\text{Quindi } \iint_T \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} \rho d\rho$$

$\uparrow$ Descrizione di T in coord. polari
 $\uparrow$ $\sqrt{x^2 + y^2}$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\rho^3]_{\rho=0}^{\rho=\frac{1}{\cos \theta}} d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \text{Analisi 1}$$

$$\int \frac{1}{\cos^3 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{\cos^4 \theta} d\theta = \int \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta \stackrel{t = \sin \theta}{=} \int \frac{dt}{(1 - t^2)^2}$$

e questa si integra come funzione razionale

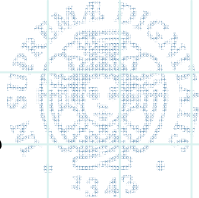
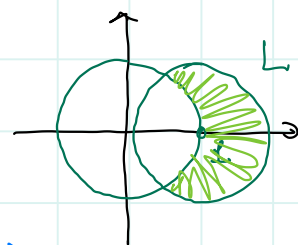
Esempio 2 Sia L come in figura.

Calcolare

$$\iint_L x \, dx \, dy$$

$$\iint_L y \, dx \, dy = 0$$

↑
per simmetria



Problema: vedere L come insieme normale è antipatico

Scriviamo le eq. dei due cerchi

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 \geq 1}_{\text{fuori dal cerchio di sinistra}}, \underbrace{(x-1)^2 + y^2 \leq 1}_{\text{dentro il cerchio a destra}}\}$$

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 2x$$

Quindi L si descrive come $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2x$, cioè
 $1 \leq \rho^2 \leq 2\rho \cos \theta$

la quale a sua volta diventa

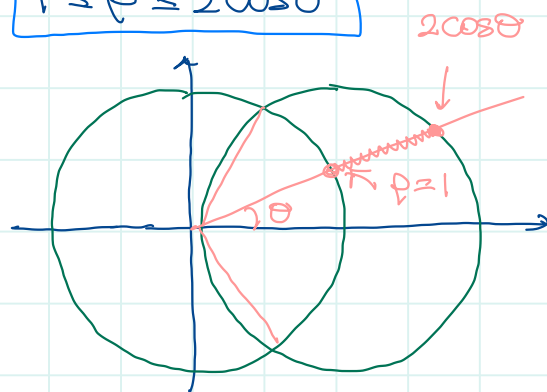
$$\rho \geq 1 \quad \rho \leq 2 \cos \theta, \text{ cioè}$$

$$1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$$

Dove varia θ ? $-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

Come ho trovato $\pm \frac{\pi}{3}$? Deve essere

$$2 \cos \theta \geq 1, \text{ cioè } \cos \theta \geq \frac{1}{2}, \text{ cioè } -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \quad \ddot{\smile}$$



La descrizione di L in coord. polari è

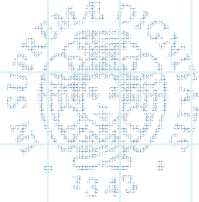
$$-\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$$

$$1 \leq \rho \leq 2 \cos \theta$$

$$\iint_L x \, dx \, dy = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_1^{2 \cos \theta} \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \cos \theta (8 \cos^3 \theta - 1) \, d\theta$$

= si fa ...

Esempio 3 (Esercizio della FOGNA)



$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1\}$$

= intersezione di 2 cilindri con lo stesso raggio e assi perpendicolari

Calcolare il volume di A

$$\text{Vol}(A) = \iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-1}^1 dz \, \text{Area}(S_z)$$

↑
sezioni

Capire come è fatta la sezione S_z fissato z .

Dalle equazioni troviamo $x^2 \leq 1 - z^2$ $y^2 \leq 1 - z^2$

$$\left. \begin{aligned} -\sqrt{1-z^2} \leq x \leq \sqrt{1-z^2} \\ -\sqrt{1-z^2} \leq y \leq \sqrt{1-z^2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{quadrato con centro in } (0,0) \\ &\text{e "semilato"} \sqrt{1-z^2} \end{aligned}$$

(Geometricamente, sezionando ad altezza z , si ottengono due "rettangoli infiniti")

$$\text{Quindi } \text{Area}(S_z) = 4(1-z^2) \text{ e } \text{Vol} = 4 \int_{-1}^1 (1-z^2) dz !!!$$

2° modo Provo a scriverlo come insieme normale risp. al piano xy .
Intanto $\text{Vol}(V) = 2 \, \text{Vol}(V_+)$
↑
p.ti di V con $z \geq 0$

Chi è la base Ω , cioè la proiezione di V sul piano xy ?

Chiaramente $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

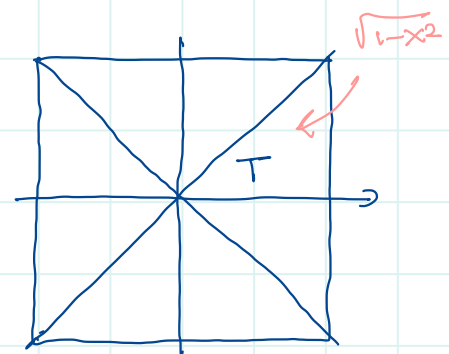
Chi è la colonna su un p.to $(x, y) \in \Omega$? Deve essere

$$z^2 \leq 1 - x^2 \quad z^2 \leq 1 - y^2$$

$$\text{Quindi } z \leq \min \{ \sqrt{1-x^2}, \sqrt{1-y^2} \}$$

Chi è il minimo varia da zona a zona.

Indicato con T il triangolo



$$\text{Vol}(V) = 16 \iint_T \sqrt{1-x^2} \, dx \, dy$$

↑
su T la colonna è $0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}$

$$= 16 \int_0^1 dx \int_0^x dy \sqrt{1-x^2} = 16 \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

$$= 8 \left[-\frac{1}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{x=0}^{x=1}$$

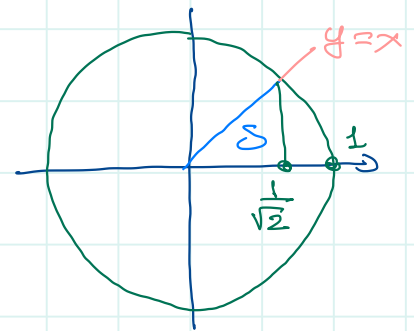
Controllare che venga lo stesso di prima.

Esempio 4 $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq 1, z^2 + x^2 \leq 1\}$
3 cilindri con assi ortogonali.

Grosso problema: le sezioni a z fisso non sono + quadrati, ma quadrati $\cap$ il nuovo cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$.
[Si può fare, ma è delicato !!]

Si sa il metodo come insieme normale, con l'unica variante che ora la base non è il quadrato, ma il cerchio $x^2 + y^2 \leq 1$

Come prima $\text{Vol}(B) = 16 \iint_S \sqrt{1-x^2} dx dy$



Questo si può fare in coord polari $\rightarrow$ porre
oppure spezzando in 2

$$16 \left\{ \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_0^x dy \sqrt{1-x^2} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \sqrt{1-x^2} \right\}$$

Entrambi gli integrali si calcolano facilmente!!

[Controllare che nei due modi venga lo stesso]

[Domanda: quante sono le facce di B ??]

— o — o —