

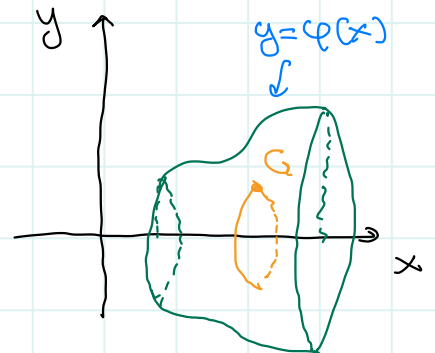
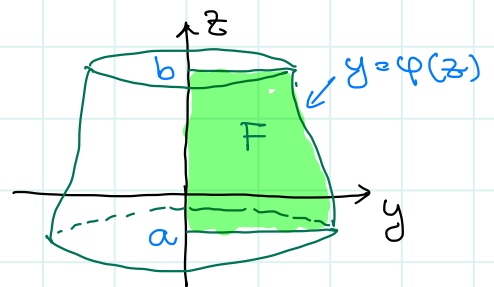
SOLIDI DI ROTAZIONE

TEOREMA DI GOLDINO PER I VOLUMI

Consideriamo una figura piana F nel piano yz e la ruotiamo attorno all'asse z per ottenere un solido V .

Possiamo pensare anche ad una F nel piano xy che ruota attorno all'asse x .

Il caso speciale è quello di una figura F descritta da



$$F = \{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(z) \} \text{ nel 1° caso}$$

$$F = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \varphi(x) \} \text{ nel 2° caso.}$$

Equazione del solido di rotazione

In coord. cilindriche diventa

$$a \leq z \leq b$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \rho \leq \varphi(z)$$

La sezione ad altezza z

è un cerchio di raggio $\varphi(z)$

L'ultima equazione si può scrivere come

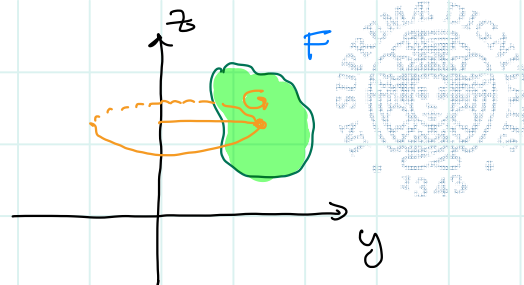
$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq \varphi(z) \quad \text{o in modo equivalente}$$

$$x^2 + y^2 \leq \varphi(z)^2$$

Nel secondo scenario diventa

$$y^2 + z^2 \leq \varphi(x)^2$$

Nel caso di una figura F più generale
la descrizione in cilindriche diventa



$$0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (p, z) \in F$$

↑
distanza
dall'asse z

Come calcolo il volume di un solido di rotazione?

Nel caso modello

$$\text{Vol}(V) = \pi \int_a^b \varphi(z)^2 dz$$

Nel caso più generale

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

↑
distanza dall'asse
di rotazione

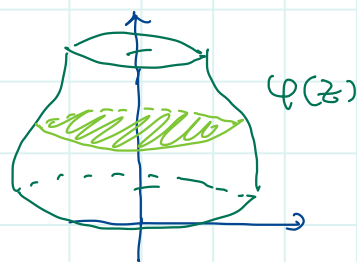
Teorema di GOLDINO 1

↑
Vale anche per lo
scenario in cui la
rotazione è intorno
all'asse x

$$\text{Vol}(V) = \underbrace{2\pi y_G}_{\substack{\text{lungh. della circ.} \\ \text{percorsa da G durante} \\ \text{la rotazione}}} \cdot \underbrace{\text{Area}(F)}_{\substack{\text{area della figura} \\ \text{che ruota}}}$$

Dim caso modello

$$\begin{aligned} \text{Vol}(V) &= \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz \stackrel{\text{sezioni}}{=} \int_a^b \text{Area}(S_z) \, dz \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{cerchio di raggio } \varphi(z) \\ &= \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz \end{aligned}$$



In alternativa si poteva calcolare l'integrale con le coord.
cilindriche!

$$\iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \stackrel{\uparrow J}{=} \pi \int_a^b \varphi(z)^2 \, dz$$

$\int_0^{2\pi} d\theta$
 $\int_0^{\varphi(z)} \rho \, d\rho \stackrel{\uparrow J}{=} \left[\frac{1}{2} \rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)}$

Dim caso generale Uso ancora le cilindriche

$$\begin{aligned} \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{(r,z) \in F} \rho \, d\rho \, dz \stackrel{\uparrow J}{=} \\ &= 2\pi \iint_F \rho \, d\rho \, dz = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz \end{aligned}$$

Dim Guldinus dato il caso generale

$$\text{Vol}(V) = 2\pi \iint_F y \, dy \, dz$$

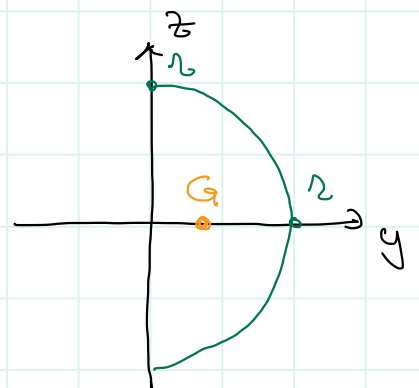
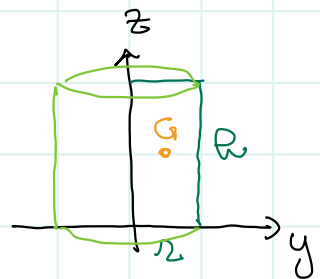
$$= 2\pi \underbrace{\frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dy \, dz}_{y_G} \cdot \text{Area}(F)$$

Esempio 1 Cilindro

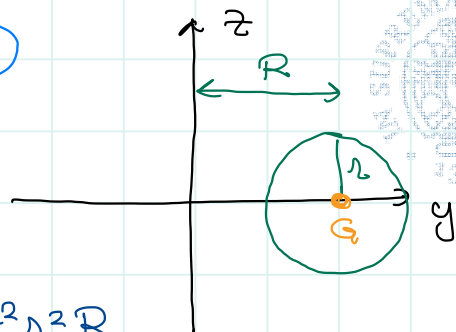
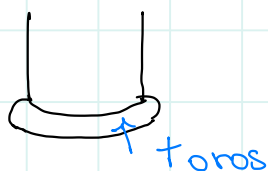
$$\text{Vol} = 2\pi y_G \cdot \text{area}(F) = 2\pi \frac{r}{2} r R = \pi r^2 R$$

Esempio 2 Sfera

$$\begin{aligned} \text{Vol} &= 2\pi y_G \cdot \text{area}(F) = \cancel{2\pi} \cdot \frac{4}{3\pi} r \cdot \frac{\pi r^2}{2} \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{calcolato} \\ &\quad \text{des. prec.} \\ &= \frac{4}{3} \pi r^3 \end{aligned}$$



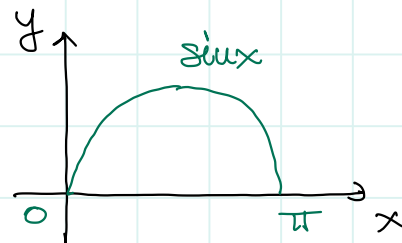
Esempio 3 Toro (ciambella)



$$Vol = 2\pi y_G \cdot Area(F) = 2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 R r^2$$

Esempio 4 Sia $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :$

$$0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$$



Se ruotiamo di 360° intorno all'asse x , qual è il Volume

$$Vol = \pi \int_a^b f(x)^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \pi^2$$

Determinare le coord. del baricentro del solido ottenuto

Per simmetria sarà $x_G = \frac{\pi}{2} \quad y_G = 0 \quad z_G = 0$

Se ruotiamo di 360° intorno all'asse y , qual è il volume

$$Vol = 2\pi x_G \cdot Area(F) = 2\pi \frac{\pi}{2} \cdot 2 = 2\pi^2$$

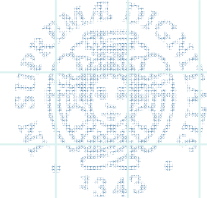
$\uparrow$
coord. x del
baricentro della
figura

Stesso scenario, determinare le coord. del baricentro

Per simmetria $x_G = z_G = 0$, cioè il baricentro sta sull'asse y .

Per calcolare y_G dovrai calcolare $\iiint_V y \, dx \, dy \, dz$

Uno sarebbe tentato di farlo per sezioni



$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dy \, y \cdot \text{Area}(S_y)$$

↑
sezione ad altezza y
che è una colonna circolare
i cui raggi volendo si
calcolano

In alternativa si può fare come insieme normale rispetto al piano xz o in coord. cilindriche

$$\iiint_V y \, dx \, dy \, dz = \iint_{\Omega} dx \, dz \int_0^{\sin(\sqrt{x^2+z^2})} y \, dy$$

↑
come è fatta la colonna?

↑
distanza dall'asse y

$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \sin^2(\sqrt{x^2+z^2}) \, dx \, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \sin^2(\rho) \cdot \rho$$

↑
 ρ

= si fa

— 0 — 0 —