



CALCOLO DI BARICENTRI E MOMENTI DI INERZIA

Def. Data una figura $F \subseteq \mathbb{R}^2$, il suo baricentro è il punto G di coordinate (x_G, y_G) date da

$$x_G := \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F x \, dx \, dy$$

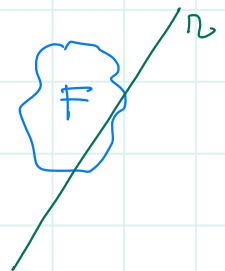
$$y_G := \frac{1}{\text{Area}(F)} \iint_F y \, dx \, dy$$

Per i solidi $S \subseteq \mathbb{R}^3$ valgono formule analoghe, del tipo

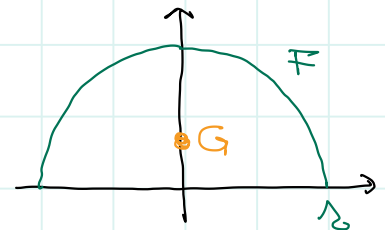
$$x_G := \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S x \, dx \, dy \, dz \text{ e idem per } y_G \text{ e } z_G$$

Def. Data una figura F ed una retta r , si definisce momento di inerzia di F rispetto ad r l'integrale

$$\iint_F \text{dist}((x, y), r)^2 \, dx \, dy$$



Esempio 1 Baricentro di un semicerchio



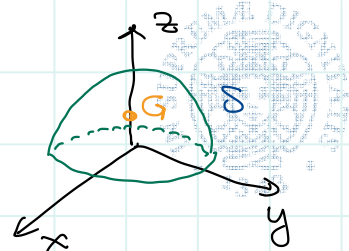
Per simmetria $x_G = 0$

$$\iint_F y \, dx \, dy = \int_0^r \rho \, d\rho \int_0^\pi d\theta \, \rho \sin\theta \cdot \rho = \underbrace{\int_0^r \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3}r^3} \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_2 = \frac{2}{3}r^3$$

$$\text{Area}(F) = \frac{\pi}{2} r^2$$

$$y_G = \frac{2}{3} r^3 \cdot \frac{2}{\pi r^2} = \frac{4}{3\pi} r \quad \left(< \frac{r}{2} \right)$$

Esempio 2 Baricentro di una semisfera



Per simmetria $x_G = y_G = 0$

$$\begin{aligned} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \rho \sin \varphi \, \rho^2 \cos \varphi \\ &= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{4} R^4 \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} R^4 \end{aligned}$$

$$\text{Quindi } z_G = \frac{1}{\text{Vol}(S)} \iiint_S z \, dx \, dy \, dz = \frac{1}{\frac{2}{3} \pi R^3} \cdot \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{3}{8} R$$

Oss Chi è più alto tra baricentro semicerchio e semisfera?

$$\frac{3}{8} \stackrel{?}{<} \frac{4}{3\pi} \Leftrightarrow 9\pi \stackrel{?}{<} 32 \quad \text{OK}$$

Questo era prevedibile geometricamente

Esempio 3 Calcolare il momento di inerzia di una sfera rispetto all'asse z

$$\begin{aligned} \text{Per definizione } \iiint_S \text{dist}((x,y), \text{asse } z)^2 \, dx \, dy \, dz \\ = \iiint_S (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

1° modo Coordinate cilindriche

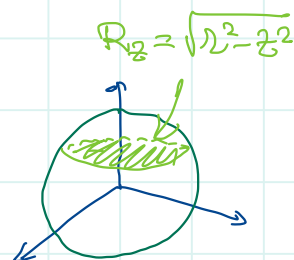
Descrizione della sfera

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-R \leq z \leq R$$

$$x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2$$

$$0 \leq \rho \leq \sqrt{R^2 - z^2}$$



$$\iiint_S (x^2+y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \rho^2 \cdot \rho d\rho$$

$\uparrow$ x^2+y^2 $\uparrow$ J

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz \frac{1}{4} [\rho^4]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{1-z^2}}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-1}^1 dz (1-z^2)^2 = \frac{\pi}{2} \cdot 2 \int_0^1 (1^4 - 2z^2 + z^4) dz$$

$$= \pi \left[z - \frac{2}{3} z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right]_{z=0}^{z=1} = \pi \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{8\pi}{15}}$$

2° modo Osservo che

$$\iiint_S (x^2+y^2) dx dy dz = 2 \iiint_S z^2 dx dy dz$$

$\uparrow$
 simmetria

$$= 2 \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \rho^2 \sin^2 \varphi \rho^2 \cos \varphi$$

$$= 2 \int_0^1 \rho^4 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cos \varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 2\pi \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{8}{15} \pi}$$

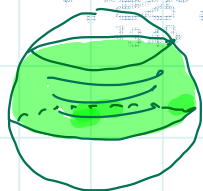
$\frac{1}{5} \rho^5$ 2π $\left[\frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right]_{\varphi=-\frac{\pi}{2}}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

Oss. Il momento di inerzia viene lo stesso rispetto a QUALUNQUE retta che passa per il centro

(per simmetria posso sempre mettere gli assi in modo che la retta sia l'asse z)

Esercizio Cercare di capire se per un cerchio in $\mathbb{R}^2$ la costante è + grande o + piccola (e poi calcolarla)

Esempio 4 Calcolare il volume della sfera, o meglio del segmento sferico



$$S_{a,b} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2, a \leq z \leq b\}$$

Si fa equivalentemente in cilindriche o per sezioni

$$\text{Vol}(S_{a,b}) = \iiint_{S_{a,b}} 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_a^b dz \, \text{Area}(S_z) = \pi \int_a^b (r^2 - z^2) dz$$

$\uparrow$
 cerchio di
 raggio $\sqrt{r^2 - z^2}$

$$= \pi \left[r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{z=a}^{z=b} = \boxed{\pi \left\{ r^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \right\}}$$

Oss. Se voglio tutta la sfera prendo $b = r$ e $a = -r$ e trovo

$$\pi \left\{ 2r^3 - \frac{2}{3} r^3 \right\} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Esempio 5 Baricentro del cono con raggio base r ed altezza R .

Diamo per buono $\text{Vol}(C) = \frac{1}{3} \pi r^2 R$ e che $x_G = y_G = 0$ per simmetria.

$$\begin{aligned} \iiint_C z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^R dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) \\ &= \int_0^R dz \, z \pi \frac{r^2 (R-z)^2}{R^2} \end{aligned}$$

= si fa --

Dividendo per il $\text{Vol}(C)$ dovrebbe venire $\frac{1}{4} R$

— 0 — 0 —

