



Modo alternativo di calcolare J

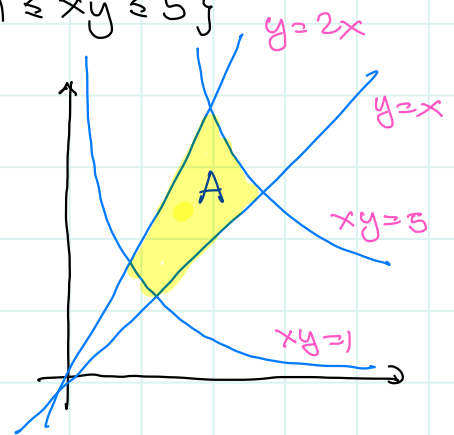
Esempio 1 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 5\}$

Calcolare $\text{Area}(A)$

Vederlo come insieme normale è complicato

$$1 \leq \underbrace{\frac{y}{x}}_u \leq 2$$

$$1 \leq \underbrace{xy}_v \leq 5$$



$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \iint_B 1 \, J(u, v) \, du \, dv$$

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 5\}$$

① Ricavare $\begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = xy \end{cases} \quad \begin{cases} y = \sqrt{uv} = \sqrt{v} \cdot \sqrt{u} \\ x = \sqrt{\frac{v}{u}} = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \end{cases}$

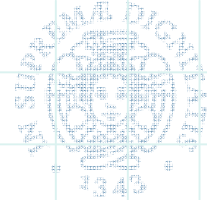
② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \\ -\frac{\sqrt{v}}{2u\sqrt{u}} & \frac{1}{2\sqrt{u}\sqrt{v}} \end{pmatrix}$

③ $J(u, v) = |\text{Det}| = \left| \frac{1}{4u} + \frac{1}{4u} \right| = \frac{1}{2u}$

Conclusione $\text{Area}(A) = \iint_B \frac{1}{2u} \, du \, dv = \int_1^2 \frac{1}{2u} \, du \int_1^5 \underbrace{1}_{\frac{1}{4}} \, dv$
 $= \boxed{2 \log 2}$

Modo alternativo di calcolare J . Posto da $u = \frac{y}{x}$ $v = xy$

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{pmatrix}$$

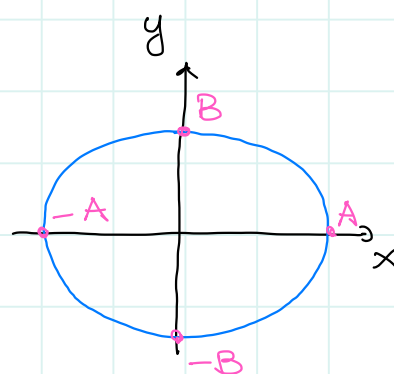


$$|\det| = \left| -\frac{2y}{x} \right| = 2u$$

Ora il vero J è $\frac{1}{J_{\text{abusivo}}} = \frac{1}{2u}$ 😊

[Ci sta sotto il fatto che la trasformazione inversa ha come matrice jacobiana la matrice inversa e il det. dell'inversa è il reciproco del determinante]

Esempio 2 Calcolare l'area dell'ellisse con semiasse A e B



Chiamo E la figura, che avrà equazione

$$\underbrace{\left(\frac{x}{A}\right)^2}_u + \underbrace{\left(\frac{y}{B}\right)^2}_v \leq 1$$

$$\text{Area}(E) = \iint_E 1 \, dx \, dy = \iint_F 1 \cdot J(u,v) \, du \, dv$$

$\uparrow$ $u^2 + v^2 \leq 1$ $\uparrow$ $A \cdot B$

$$= AB \cdot \iint_F 1 \, du \, dv = \boxed{\pi AB}$$

Oss. Quando $A = B = R$, otteniamo la classica area del cerchio.

Oss. In $\mathbb{R}^3$ il volume di $\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 + \left(\frac{z}{C}\right)^2 \leq 1$ è

$$\boxed{\frac{4}{3} \pi ABC}$$

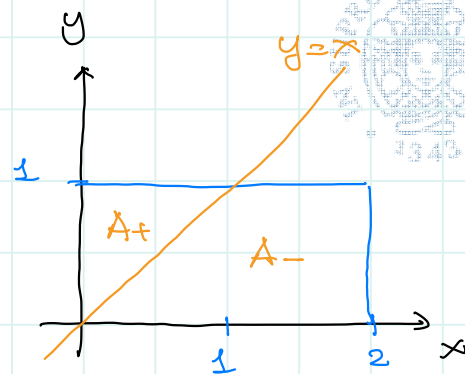
INTEGRALI CON VALORI ASSOLUTI

Esempio 3

Calcolare

$$A = [0, 2] \times [0, 1]$$

$$\iint_A |y-x| dx dy$$



SLOGAN: SPEZZARE PER TOGLIERE IL VALORE ASSOLUTO

$$A_+ = \{(x,y) \in A : y-x \geq 0\}$$

$$A_- = \{(x,y) \in A : y-x \leq 0\}$$

$$\text{Allora } \iint_A |y-x| dx dy = \iint_{A_+} (y-x) dx dy + \iint_{A_-} (x-y) dx dy$$

$\uparrow$ $|y-x| = y-x$ in A_+
 $\uparrow$ $|y-x| = x-y$ in A_-

$$= \iint_{A_+} (y-x) dx dy - \iint_{A_-} (y-x) dx dy$$

(in questo modo l'integrand è sempre la stessa)

$$= \underbrace{\int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x)}_{\text{normale asse } x} - \underbrace{\int_0^1 dy \int_y^2 dx (y-x)}_{\text{normale asse } y, \text{ per cui non} \\ \text{dovrà a sua volta dividere in due parti}}$$

2° modo Partiremo da $\iint_A |y-x| \dots = \iint_{A_+} (y-x) - \iint_{A_-} (y-x)$

$$\iint_A (y-x) = \iint_{A_+} (y-x) + \iint_{A_-} (y-x)$$

Dalla seconda relazione: $\iint_{A_-} (y-x) = \iint_A (y-x) - \iint_{A_+} (y-x)$
e quindi, sostituendo nella prima

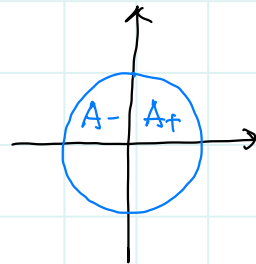
$$\iint_A |y-x| dx dy = 2 \iint_{A+} (y-x) dx dy - \iint_{A-} (y-x) dx dy$$

$$= 2 \int_0^1 dx \int_x^1 dy (y-x) - \int_0^2 dx \int_0^1 dy (y-x)$$

= si fa

Esempio 4 A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 2

$$\iint_A |x| dx dy$$



$$\iint_A |x| dx dy = \iint_{A+} x dx dy - \iint_{A-} x dx dy$$

Più brevemente, per simmetria

$$\iint_A |x| dx dy = 2 \iint_{A+} x dx dy = 4 \iint_{\text{quadrante}} x dx dy =$$

↑
simmetria
alto/basso

$$= 4 \int_0^2 \rho d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \rho \cos\theta \cdot \rho = 4 \int_0^2 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta$$

$\underbrace{\int_0^2 \rho^2 d\rho}_{\frac{8}{3}} \quad \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta}_1$

$$= \frac{32}{3}$$

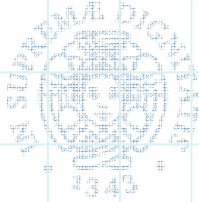
Esempio 5 $\iiint_S |x| dx dy dz$

S = sfera con centro in $(0,0,0)$
e raggio 1

Sempre per simmetria

$$\iiint_S |x| = \iiint_S |y| = \iiint_S |z| = 2 \iiint_{S+} z dx dy dz$$

↑ semisfera alta, cioè
quella con $z \geq 0$



$$= 2 \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \underbrace{\rho \sin \varphi}_{\frac{1}{2}} \underbrace{\rho^2 \cos \varphi}_{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi}_{\left[\frac{1}{2} \sin^2 \varphi \right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2} = \frac{1}{2}} = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$