

CAMBI DI VARIABILE IN GENERALE

Scrivo la formula per integrali doppi (per quelli tripli è uguale)

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_B \boxed{g(u,v)} \boxed{J(u,v)} du dv$$

↑ insieme A descritto nelle nuove coord. di u e v
↑ pagamento
← funzione f scritta nelle nuove coordinate

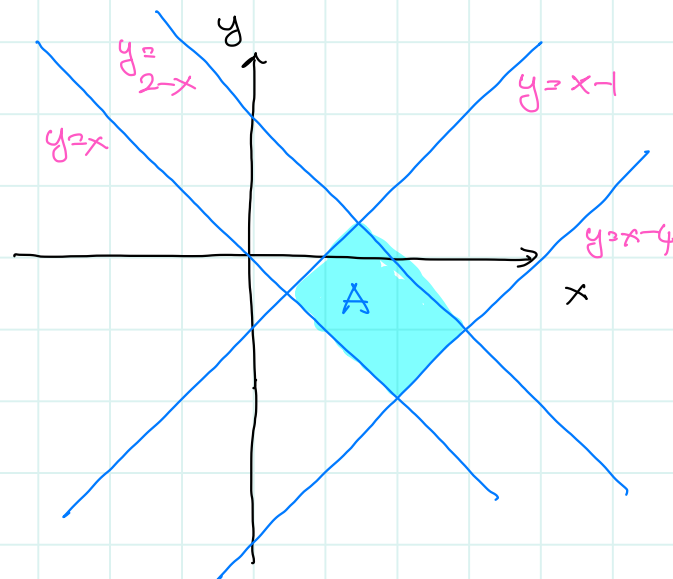
Come determino $J(u,v)$? In 3 fasi

- ① Ricavare
- ② Matrice jacobiana
- ③ Determinante

Esempio 1 $A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x+y \leq 2, 1 \leq x-y \leq 4 \}$

Calcolare $\iint_A (x^2 - y^2) dx dy$

Volevo, sperando in 3 o' insieme A diventa normale rispetto all'asse x



$$\underbrace{0 \leq x+y \leq 2}_u \quad \underbrace{1 \leq x-y \leq 4}_v$$

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = uv$$

$$\iint_A (x^2 - y^2) dx dy = \int_0^2 \int_1^4 du dv$$

insieme A nelle nuove coord.

$$\boxed{uv}$$

stessa funz. in u e v

$J(u,v)$

Procedura per il calcolo di $J(u, v)$

① Ricavare x e y in funzione di u e v

$$\begin{aligned} u &= x+y \\ v &= x-y \end{aligned} \quad \leadsto \quad \begin{aligned} x &= \frac{u+v}{2} \\ y &= \frac{u-v}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

② Costruire la matrice jacobiana della trasformazione

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

③ Calcolo il valore assoluto del determinante

$$J(u, v) = |\text{Det}| = \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

Nel nostro caso resta

$$\int_0^2 du \int_1^4 dv \quad uv \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \int_0^2 u du [v^2]_{v=1}^{v=4} = \frac{15}{4} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 = \frac{15}{2}$$

— 0 — 0 —

Esempio 2 In coord. polari $x = \rho \cos \theta$ $y = \rho \sin \theta$

① Ricavare $\leadsto$ già fatto

② Matrice jacobiana

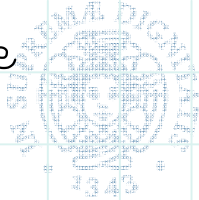
$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{pmatrix}$$

③ Determinante

$$J(\rho, \theta) = |\rho \cos^2 \theta + \rho \sin^2 \theta| = \rho \quad \ddot{\circ}$$

— 0 — 0 —

Esempio 3 Sia C la circonferenza con centro in $(2,1)$ e raggio 3. Calcolare



$$\iint_C y^2 dx dy$$

Scrivo l'eq. della circ. $\underbrace{(x-2)}_u^2 + \underbrace{(y-1)}_v^2 = 9$

$$\iint_C y^2 dx dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 9} du dv \cdot \underbrace{(v+1)^2}_{y^2} \cdot \underbrace{1}_{J}$$

nuovo insieme

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 9} (v^2 + 2v + 1) du dv = 9\pi + \iint_{u^2+v^2 \leq 9} v^2 du dv$$

simmetria Area Cerchio = 9π

= si fa.

Giustificiamo il J

① Ricavare $u = x-2 \quad x = u+2$
 $v = y-1 \quad y = v+1$

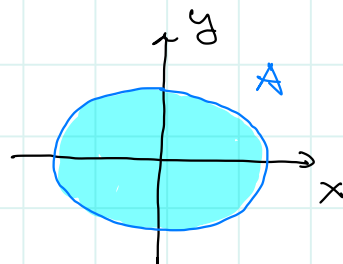
② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $|\text{Det}| = 1$

Fatto generale Se la trasformazione è una traslazione, allora $J=1$ perché la matrice è l'identità

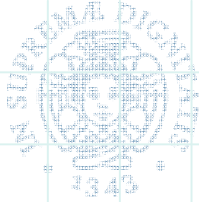
Esempio 4 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \leq 4\}$



Calcolare $\iint_A (x+y)^2 dx dy$

$$\underbrace{(\sqrt{2}x)}_u^2 + \underbrace{(\sqrt{3}y)}_v^2 \leq 4$$

$$B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 \leq 4\}$$



$$\iint_A (x+iy)^2 dx dy = \iint_B \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{3}} \right)^2 J(u, v) du dv$$

① Ricambio $u = \sqrt{2}x$ $x = \frac{u}{\sqrt{2}}$
 $v = \sqrt{3}y$ $y = \frac{v}{\sqrt{3}}$

② Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $|\text{Det}| = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_B \left(\frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{3} + 2 \frac{uv}{\sqrt{6}} \right) du dv$$

↓
0 per simmetria

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{5}{6} \iint_B u^2 du dv$$

↑ (o v^2, che è lo stesso)

$$= \frac{5}{6\sqrt{6}} \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho = \frac{5}{6\sqrt{6}} \pi \int_0^2 \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{5}{6\sqrt{6}} \pi \cdot \frac{16}{4} = \dots$$

Provare per esercizio a farlo come insieme normale.

FATTO GENERALE Se il cambio di variabili è del tipo

$$u = ax + \alpha$$

$$v = by + \beta$$

allora la matrice è diagonale e $J(u, v)$ è un numero.

Esempio 5 $A =$ sfera con centro in $(1, 2, 3)$ e passante per l'origine.

Calcolare

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2$$

L'equazione della sfera è $\underbrace{(x-1)}_u^2 + \underbrace{(y-2)}_v^2 + \underbrace{(z-3)}_w^2 = 14$

Detta B la sfera con centro in $(0, 0, 0)$ e raggio $\sqrt{14}$, viene

$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iiint_B (w+3) \, \underbrace{1}_{\substack{\uparrow \\ J(u,v,w)}} \, du \, dv \, dw$$

perché la trasformazione è una traslazione

$$= 3 \text{ Volume sfera} = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot 14 \sqrt{14} = 56 \sqrt{14} \pi$$

— 0 — 0 —

Brutalmente, perché viene fuori un determinante?

Supponiamo $x = au + bv$

$$y = cu + dv$$

cioè supponiamo che la trasformazione sia lineare.

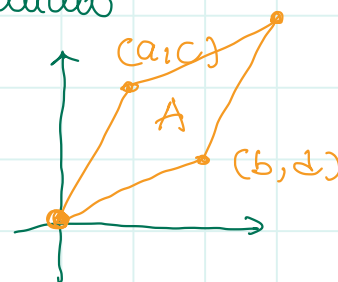
Supponiamo che la funzione da integrare sia $\pm$ (costante), quindi $f(x, y) \equiv \pm$ e $g(u, v) \equiv \pm$.

Supponiamo che $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1\}$.

Domanda: chi sarebbe A ? Con un minimo di algebra lineare, si vede che è un parallelogrammo

$$\iint_A \pm \, dx \, dy = \text{Area paralle.} = |ad - bc|$$

$$\iint_B \pm J \, du \, dv = J \rightsquigarrow J = |ad - bc|$$



Con Taylor e la costruzione dell'integrale il discorso si generalizza

— 0 — 0 —