



USO DELLE SIMMETRIE NEGLI INTEGRALI

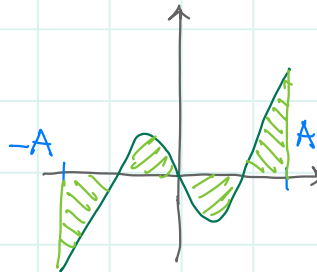
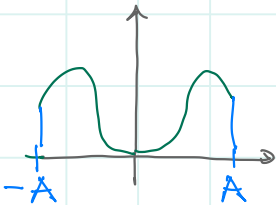
Analisi 1

- Se $f(x)$ è una funzione PARI ($f(-x) = f(x)$), allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx \quad \forall A > 0$$

- Se $f(x)$ è una funzione DISPARI ($f(-x) = -f(x)$), allora

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 0$$



Analisi 2

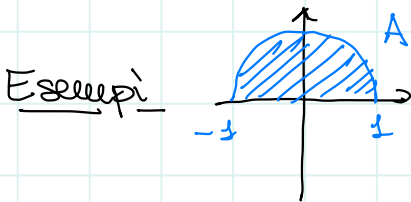
Stessa cosa per integrali doppi o tripli.

Ad esempio

- Se $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è simmetrico risp. asse y ($(x, y) \in A \Leftrightarrow (-x, y) \in A$) e f è dispari in x (ovè $f(-x, y) = -f(x, y)$), allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = 0$$

- stesso discorso invertendo x e y .



$$\iint_A x dx dy = 0$$

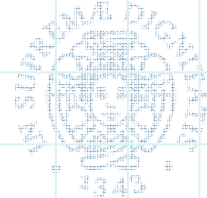
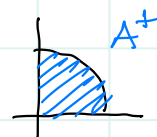
(Brutalmente: tanto x è positivo a dx quanto è negativo a sx)

Formalmente: A è simmetrico risp. asse y

$f(-x, y) = -f(x, y)$, ovè f è dispari in x

$$\iint_A y \, dx \, dy > 0 \quad (\text{per la proprietà di monotonia})$$

$$= 2 \iint_{A^+} y \, dx \, dy$$



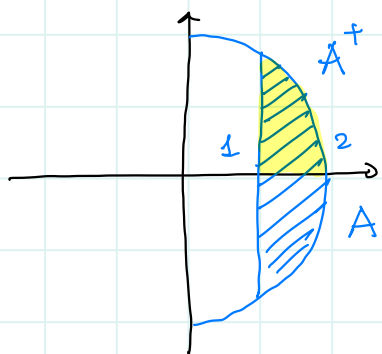
Formalmente: A è simmetrico risp. all'asse y

$f(-x, y) = f(x, y)$, cioè f è pari in x

$$\iint_{A^+} x \, dx \, dy = \iint_{A^+} y \, dx \, dy$$

Qui entra in gioco la simmetria rispetto alla bisettrice $y=x$ (se scambio x e y , l'insieme resta lo stesso e gli integrali si scambiano) (graficamente si ottengono l'uno dall'altro per simmetria).

Esempio 2



$$\iint_A (x+y) \, dx \, dy = 2 \iint_{A^+} x \, dx \, dy$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = 0$$

Formalmente: A è simmetrico risp. asse x e $f(x, -y) = -f(x, y)$, cioè f è dispari in y .

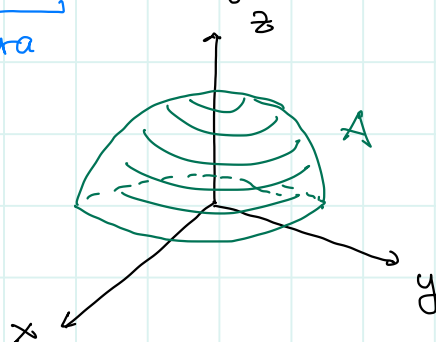
$$\iint_A x \, dx \, dy = 2 \iint_{A^+} x \, dx \, dy$$

(se lo facessi come insieme normale rispetto all'asse x me ne accorgerei)

Esempio 3 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1}_{\text{dentro la sfera}}, \overbrace{z \geq 0}^{\text{sopra il piano } xy}\}$

$$\iiint_A (x + y + z) \, dx \, dy \, dz$$

L'insieme A è la semisfera alta



Osserviamo che $\iint_A x \, dx \, dy \, dz = \iint_A y \, dx \, dy \, dz = 0$ per simmetria

→ se cambio x con $-x$ l'insieme non cambia, cioè

$$(x, y, z) \in A \Leftrightarrow (-x, y, z) \in A$$

→ la funzione x è banalmente dispari in x

Questo basta per concludere che

$$\iint_A x \, dx \, dy \, dz = 0, \text{ ma anche } \iint_A x^{2021} \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\text{e anche } \iint_A \arctan(x^3) \, dx \, dy \, dz = 0$$

Discorso analogo vale per la variabile y . Quindi basta calcolare

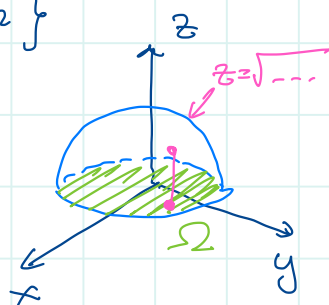
$$\iint_A z \, dx \, dy \, dz \quad (\text{e questo DEVE venire } > 0)$$

Calcolandolo per colonne Dato descrivere A per colonne

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$\uparrow$
cerchio base

$$\begin{aligned} \iint_A z \, dx \, dy \, dz &= \iint_{\Omega} dx \, dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \\ &= \iint_{\Omega} dx \, dy \quad \frac{1}{2} [z^2]_{z=0}^{z=\sqrt{1-x^2-y^2}} \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (1-x^2-y^2) \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta (1-\rho^2) \rho$$

$$= \pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho = \pi \left[\frac{1}{2} \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right]_{\rho=0}^{\rho=1} = \boxed{\frac{\pi}{4}}$$

Calcoliamo per sezioni

Intanto $0 \leq z \leq 1$

Fissato $z \in [0, 1]$, la sezione S_z ad altezza z è un cerchio di raggio ...

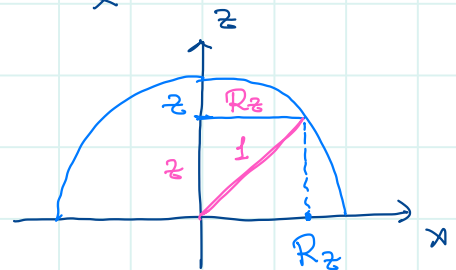
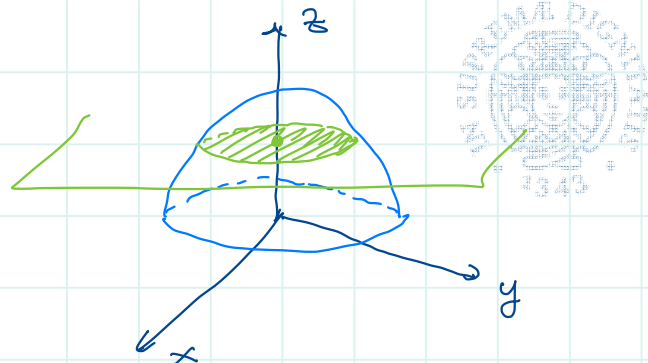
...

$$R_z = \sqrt{1-z^2}$$

(controllino: per $z=0 \rightsquigarrow R=1$
per $z=1 \rightsquigarrow R=0$)

Possiamo ora calcolare l'integrale:

$$\begin{aligned} \iiint_A z \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad \boxed{z} \\ &= \int_0^1 dz \, z \cdot \text{Area}(S_z) = \pi \int_0^1 z(1-z^2) \, dz \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{4} z^4 \right]_{z=0}^{z=1} = \boxed{\frac{\pi}{4}} \end{aligned}$$



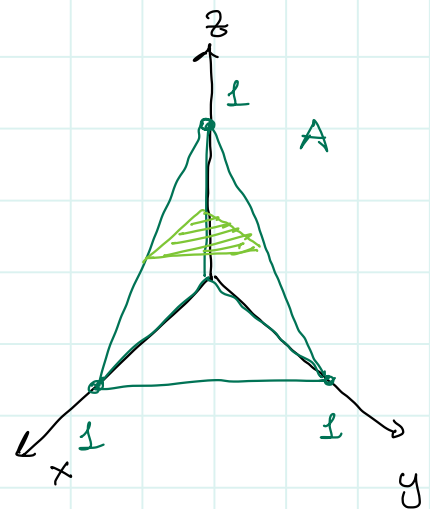
$$z^2 + R_z^2 = 1 \rightsquigarrow R_z = \sqrt{1-z^2}$$

Esempio 4 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underline{x+y+z \leq 1}, \underline{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}\}$
sotto il piano $x+y+z=1$ ottante con tutto ≥ 0

$$\iiint_A (x+zy+7z) \, dx \, dy \, dz$$

Osservazione fondamentale di simmetria:
se io permuto le variabili non cambia nulla,
quindi

$$\iiint_A x \dots = \iiint_A y \dots = \iiint_A z \dots$$



$$\text{e quindi } \iiint_A (x+zy+7z) \, dx \, dy \, dz = 10 \iiint_A z \, dx \, dy \, dz$$

Questo lo calco bene per sezioni: $0 \leq z \leq 1$. Ad altezza z ottengo un triangolo. Fatto come?

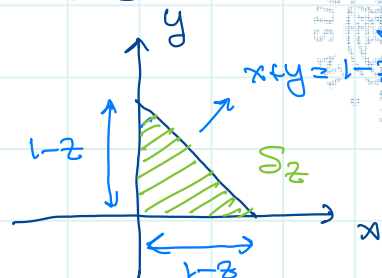
Dall'equazione troviamo $x \geq 0$ $y \geq 0$ $x+y \leq 1-z$

$$\iint_A z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx \, dy \quad (z)$$

$$= \int_0^1 dz \, z \cdot \text{Area}(S_z)$$

↑ triangolo

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dz \, z (1-z)^2 = \text{si fa} \quad \text{☺}$$

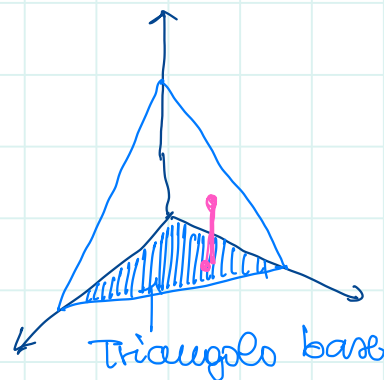


Potrei farlo per colonne? Sì!

La descrizione di A per colonne è

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$$

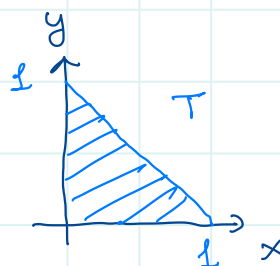
↑
triangolo base



$$\iiint_A z \, dx \, dy \, dz = \iint_T dx \, dy \int_0^{1-x-y} dz \, z$$

$$= \frac{1}{2} \iint_T (1-x-y)^2 \, dx \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1-x-y)^2$$



= si fa, ma è + scomodo di prima

[Vedere per esercizio che venga uguale].

— o — o —