



INTEGRALI PER COLONNE

$$3 = 2 + 1$$

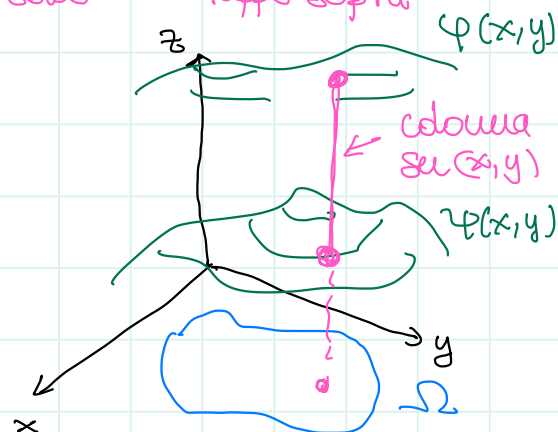
Def. Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice **NORMALE** rispetto al piano xy se si scrive nella forma

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \psi(x, y) \leq z \leq \varphi(x, y)\}$$

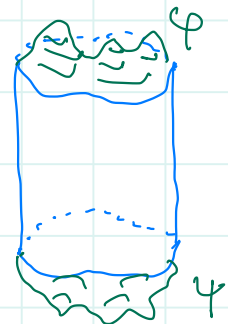
$\uparrow$ base $\uparrow$ tappo sotto $\uparrow$ tappo sopra

Si intende che

- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (piano base xy)
- $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni date



Geometricamente è una specie di cilindro che visto dall'alto si proietta su Ω , e le due funzioni φ e ψ descrivono le due basi superiori e inferiori



Oss. L'intersezione tra A e ogni retta parallela all'asse z è il segmento di estremi φ e ψ .

Formula per colonne

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\psi(x, y)}^{\varphi(x, y)} dz f(x, y, z)$$

Esempio 1 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$
 $f(x, y, z) = x^2 + z$



Primo passo: capire Ω insieme

"z sotto 1" e "z sopra paraboloide"

Quindi A è una ciotola.

Questo è normale rispetto al piano xy
 con base il cerchio

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Posso quindi scrivere A come insieme normale

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega, \underbrace{x^2 + y^2 \leq z \leq 1}_{\text{colonna sul p.to } x, y}\}$$

Ora possiamo integrare

$$\begin{aligned} \iiint_A (x^2 + z) dx dy dz &= \iint_{\Omega} dx dy \int_{x^2 + y^2}^1 (x^2 + z) dz \\ &= \iint_{\Omega} dx dy \left[x^2 z + \frac{1}{2} z^2 \right]_{z=x^2+y^2}^{z=1} \\ &= \iint_{\Omega} dx dy \left(x^2 + \frac{1}{2} - x^2(x^2 + y^2) - \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^2 \right) \end{aligned}$$

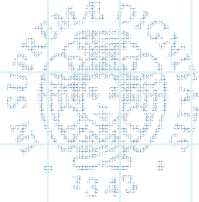
L'ultimo integrale si calcola in coord. polari e diventa

$$\boxed{\int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta} \left(\rho^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2} - \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho^2 - \frac{1}{2} \rho^4 \right) \boxed{\rho}$$

↑
 Ω in coord. polari ρ ↑ pagamento

$$\begin{aligned} &= \underbrace{\int_0^1 \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \rho d\rho}_{\text{area cerchio}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} - \underbrace{\int_0^1 \rho^5 d\rho}_{\frac{1}{6}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta}_{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \rho^5 d\rho}_{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{5\pi}{12}} \end{aligned}$$

INTEGRALI PER SEZIONI



Un insieme descritto per sezioni è qualcosa del tipo

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq z \leq b, (x, y) \in S_z\}$$

↑
min e max quota
dei punti dell'insieme A

↑
sezione di A ad
altezza S_z

La formula diventa

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x, y, z) dx dy$$

Esempio 1-bis Tutto come prima

Primo passo: descrivere l'insieme per sezioni.

→ Chi sono la quota min e max?

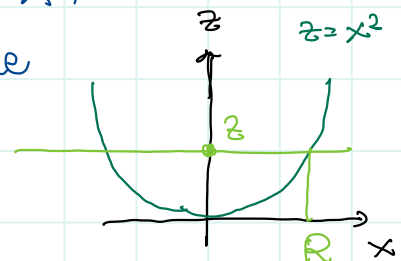
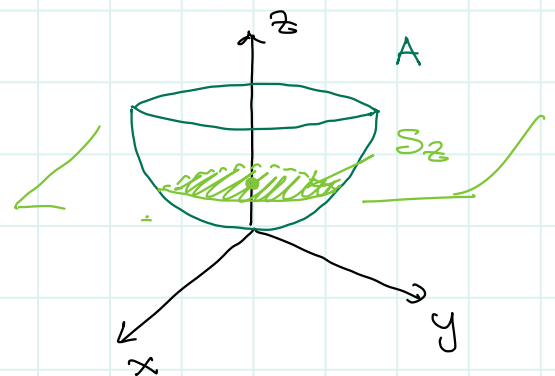
$$0 \leq z \leq 1$$

→ Fissata una quota z , chi è la sezione S_z di A.

In questo caso è ovviamente un cerchio. Come dipende da z il raggio del cerchio?

Dalla figura vedo che il raggio di S_z è $\sqrt{z}$.

(proviamo a verificare con $z=0$ e $z=1$ per evitare errori banali)



Ora siamo pronti per integrare:

$$\iiint_A (x^2 + z) dx dy dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} (x^2 + z) dx dy$$

A parte calcoliamo l'integrale interno

$$\iint_{S_z} (x^2 + z) dx dy = \iint_{S_z} x^2 dx dy + \iint_{S_z} z dx dy$$

$$= z \cdot \text{Area}(S_z) = z \cdot \pi z = \pi z^2$$

Resta da fare il 1° in coord. polari

$$\begin{aligned} \iint_{S_z} x^2 dx dy &= \int_0^{\sqrt{z}} \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2 \theta \cdot \rho \, d\theta \, d\rho \\ &= \int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta}_{\pi} = \pi \int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{4} [\rho^4]_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{z}} \\ &= \frac{\pi}{4} z^2 \end{aligned}$$

Mettendo insieme i due pezzi

$$\iint_{S_z} (x^2 + z) dx dy = \frac{\pi}{4} z^2 + \pi z^2 = \frac{5}{4} \pi z^2$$

Resta da fare $\int_0^1 \frac{5}{4} \pi z^2 dz = \frac{5}{4} \pi \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{z=1} = \boxed{\frac{5\pi}{12}}$ 😊

Esempio 2 A = stesso insieme di prima

$$f(x, y, z) = z^2$$

Serziosi di sicuro!

$$\begin{aligned} \iiint_A z^2 dx dy dz &= \int_0^1 dz \iint_{S_z} z^2 dx dy \\ &= \int_0^1 z^2 dz \iint_{S_z} dx dy = \int_0^1 z^2 \cdot \underbrace{\text{Area}(S_z)}_{\pi z} dz \\ &= \pi \int_0^1 z^3 dz = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Per colonne avremmo dovuto fare

$$\iiint_A z^2 dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^1 dz}_{\text{descrizione colonna}} \cdot z^2 = \frac{1}{3} \iint_{\Omega} dx dy [z^3]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{\Omega} (1 - (x^2 + y^2)^3) dx dy = \frac{1}{3} \text{Area}(\Omega) - \frac{1}{3} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^3 dx dy$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^6 \cdot \rho \, d\theta \, d\rho = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \rho^7 d\rho = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{12} = \boxed{\frac{\pi}{4}} \text{ 😊}$$