



Integrali tripli

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico / fisico
- ③ Idea della definizione
- ④ Come si calcolano

1 Notazioni

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

↑ talvolta si mette
un solo integrale

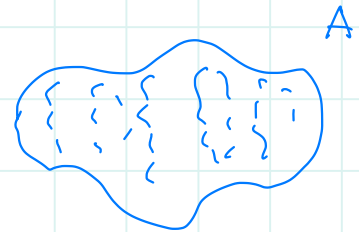
Si intende che

- $A \subseteq \mathbb{R}^3$ è l'insieme di integrazione
- $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è la funzione integranda.

L'integrale si dice **PROPRIO** se $\rightarrow A$ è limitato
 $\rightarrow f$ è limitata

altrimenti si dice **IMPROPRIO**.

2 Significato geometrico / fisico



Pensiamo A come un solido.

Se $f(x, y, z) \geq 0$, allora possiamo pensare che
 sia la densità del materiale che costituisce A .

Fare l'integrale equivale a calcolare la massa totale di A .

Se f ha segno variabile, possiamo pensare ad una densità di
 cariche elettriche. Fare l'integrale equivale a calcolare la carica
 totale.

[3] Idea della definizione

[3.1] Caso banale

$A = \text{parallelepipedo con lati // agli assi}$
 $= [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$
 $f(x, y, z) = \lambda \text{ costante in } A$

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \underbrace{\text{Vol}(A) \cdot \lambda}_{\text{massa totale del mattone}}$$

[3.2] Caso semi-banale

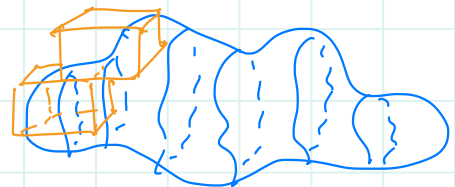
$A = \text{unione di mattoni "disgiunti"}$
 $f(x, y, z) = \text{costante eventualmente diversa}$
 $\uparrow$
 STEP FUNCTION da mattone a mattone

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \text{somma dei singoli integrali}$$

[3.3] Caso generale

$A = \text{generico insieme limitato}$
 $f(x, y, z) = \text{generica funzione limitata.}$

- Approssimiamo A con una unione di parallelepipedi, ovviamente sforando al bordo dove serve



- Su ogni mattone facciamo finta che f sia costante (a seconda che vogliamo appross. dall'alto o dal basso scegliremo una costante $\geq f$ o $\leq f$ su tutto il mattone)
- Calcoliamo la somma su tutti i mattoni e avremo una approssimazione dell'integrale
- Cerchiamo di migliorare l'appross. usando mattoni sempre più piccoli per adattarsi meglio alle variazioni di f .

Più formalmente, possiamo



$$I^+(f, A) = \inf \left\{ \iiint_B \varphi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz : B \supseteq A \text{ è unione di parallelepipedi e } \varphi \text{ è una step function con } \varphi \geq f \text{ in } A \right\}$$

$$I^-(f, A) = \sup \left\{ \iiint_B \varphi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz : B \dots \varphi \leq f \text{ in } A \right\}.$$

In generale vale solo $I^-(f, A) \leq I^+(f, A)$.

Se vale il segno di uguale (e questo succede "spesso", ad esempio se A è decente ed f è continua in A), allora il valore comune è l'integrale richiesto.

Le proprietà base, cioè

→ linearità

→ monotonia

→ additività rispetto alla zona di integrazione sono analoghe a quelle degli integrali doppi.

4 Tecniche di calcolo

Formule di riduzione

→ caso dei parallelepipedi

→ integrazione per COLONNE
(Cuscevoli normali)

→ integrazione per SEZIONI

per fare un integrale triplo, si fanno 3 integrali singoli

$$3 = 1 + 1 + 1$$

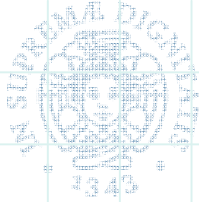
integrale doppio di int. sing.

$$3 = 2 + 1$$

integrale sing. di int. doppio

$$3 = 1 + 2$$

4.1 Integrale sui parallelepipedi



L'insieme A è del tipo $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. Allora

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz f(x, y, z)$$

Nota bene: ottergo 6 formule diverse a seconda dell'ordine in cui eseguo le integrazioni. Ad esempio un'altra formula è

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_c^d dy \int_e^f dz \int_a^b dx f(x, y, z)$$

Esempio $A = [0, 1] \times [0, 2] \times [1, 3]$ $f(x, y, z) = y + xz$

$$\begin{aligned} \iiint_A (y + xz) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz (y + xz) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[yz + \frac{1}{2}xz^2 \right]_{z=1}^{z=3} \end{aligned}$$

primitiva rispetto a z

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy (2y + 4x)$$

$$= \int_0^1 dx [y^2 + 4xy]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 (4 + 8x) dx = [4x + 4x^2]_0^1 = \boxed{8}$$

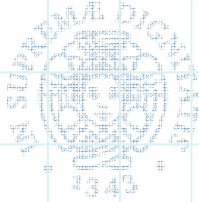
Un'altra alternativa separando l'integrale in 2

$$\iiint_A y dx dy dz + \iiint_A xz dx dy dz$$

$$\begin{aligned} \iiint_A y dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_1^3 dz \int_0^2 y dy = \int_0^1 dx \int_1^3 dz \left[\frac{1}{2}y^2 \right]_{y=0}^{y=2} \\ &= 2 \int_0^1 dx \int_1^3 dz = 2 \cdot 2 = 4 \end{aligned}$$

sto integrando su

l'insieme z , quindi viene l'area di $[0, 1] \times [1, 3]$



$$\begin{aligned} \iint_A xz \, dx \, dy \, dz &= \int_0^1 dx \int_1^3 dz \int_0^2 dy \, xz \\ &= \int_0^1 x \, dx \int_1^3 z \, dz \underbrace{\int_0^2 dy}_1 \end{aligned}$$

sto integrando 1, quindi viene 2

$$= 2 \int_0^1 x \, dx \int_1^3 z \, dz = \int_0^1 x \, dx \left[z^2 \right]_{z=1}^{z=3}$$

$$= 8 \int_0^1 x \, dx = \left[4x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = 4$$

Sommando: $4+4=8$ 😊

Fatto generale sull'integrale di 1

• In una variabile

$$\int_a^b 1 \, dx = b-a \quad (= \text{lunghezza intervallo})$$

• In due variabili

$$\iint_A 1 \, dx \, dy = \text{Area}(A)$$

(geometricamente sarebbe il volume di un solido con base A e altezza uniforme 1)

• In tre variabili

$$\iiint_A 1 \, dx \, dy \, dz = \text{Volume}(A)$$

(sarebbe la massa di un oggetto con densità costante uguale a 1)

Obs. (matematica) Il Volume di un solido qualunque A si definisce proprio come l'integrale di 1 !!!

— o — o —