



[4] Come calcolare gli integrali doppi

SLOGAN: un integrale doppio = due integrali singoli

FORMOLE DI RIDUZIONE

→ Caso dei rettangoli

→ Caso insiemii normali

→ Caso generale

[4.1] Formula di riduzione sui rettangoli

Sia $A = [a, b] \times [c, d]$. Allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d dy f(x, y) = \int_c^d dy \int_a^b dx f(x, y)$$

Esempio 1 $A = [0, 1] \times [2, 4]$ $f(x, y) = x^2 + xy$

$$\iint_A (x^2 + xy) dx dy = \int_0^1 dx \int_2^4 dy (x^2 + xy)$$

devo calcolare questo integrale rispetto alla variabile y , facendo finta che x sia costante

$$= \int_0^1 dx \left[x^2 y + x \frac{y^2}{2} \right]_{y=2}^{y=4}$$

primitiva di $x^2 + xy$ risp. a y

$$= \int_0^1 dx \{ 4x^2 + 8x - 2x^2 - 2x \}$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + 6x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + 3x^2 \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} + 3 = \boxed{\frac{11}{3}}$$

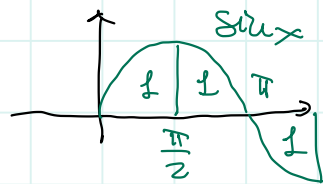
In alternativa, mettendo dx "dentro":

$$\begin{aligned}\iint_A (x^2 + xy) dx dy &= \int_2^4 dy \int_0^1 dx (x^2 + xy) \\&= \int_2^4 dy \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y \right]_{x=0}^{x=1} \\&= \int_2^4 dy \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y \right) \\&= \left[\frac{y}{3} + \frac{1}{4} y^2 \right]_{y=2}^{y=4} = \frac{4}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 1 \\&= \frac{2}{3} + 3 = \boxed{\frac{11}{3}}\end{aligned}$$

Oss. I due procedimenti portano allo stesso risultato in maniera diversa, quindi È UN OTTIMO MODO PER CONTROLLARE I CONTI.

Esempio 2 $A = [0, \pi] \times [0, 2]$ $f(x, y) = \sin x \cdot y^2$

$$\begin{aligned}\iint_A y^2 \sin x dx dy &= \int_0^\pi dx \int_0^2 dy y^2 \sin x = \int_0^\pi dx \left[\frac{1}{3} y^3 \sin x \right]_{y=0}^{y=2} \\&= \frac{8}{3} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

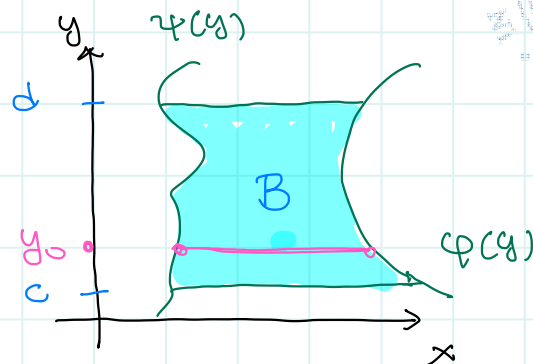
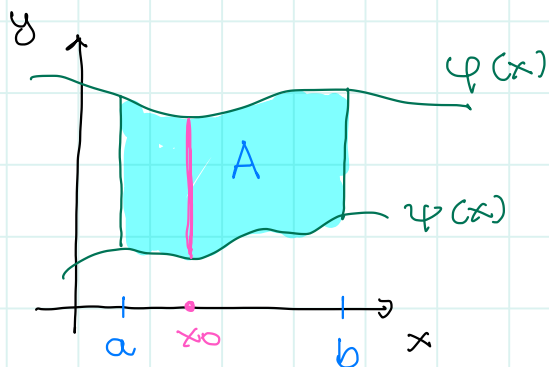
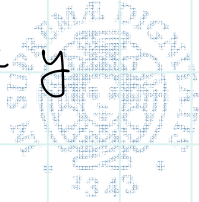


Scritto meglio:

$$\begin{aligned}\iint_A y^2 \sin x dx dy &= \int_0^\pi dx \int_0^2 dy y^2 \sin x = \int_0^\pi \sin x dx \int_0^2 y^2 dy \\&= \int_0^\pi \sin x dx \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{y=2} = \frac{8}{3} \dots \text{e da qui come prima}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_A y^2 \sin x dx dy &= \int_0^2 dy \int_0^\pi dx y^2 \sin x = \int_0^2 y^2 dy \int_0^\pi \sin x dx \\&= 2 \int_0^2 y^2 dy = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

4.2] $A =$ insieme normale rispetto all'asse x o all'asse y



$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \psi(x) \leq y \leq \varphi(x)\}$$

INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE x

(fissato un qualunque $x_0 \in [a, b]$, l'intersezione di A con la retta $x = x_0$ è un segmento)

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, \psi(y) \leq x \leq \varphi(y)\}$$

INSIEME NORMALE RISPETTO ALL'ASSE y

(le intersezioni di B con le rette // all'asse x sono segmenti)

Valgono le seguenti formule di riduzione (se A e B sono come sopra)

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} dy f(x, y)$$

Primo facendo la primitiva rispetto ad y
e poi sostituisco ad y gli estremi $\varphi(x)$ e $\psi(x)$

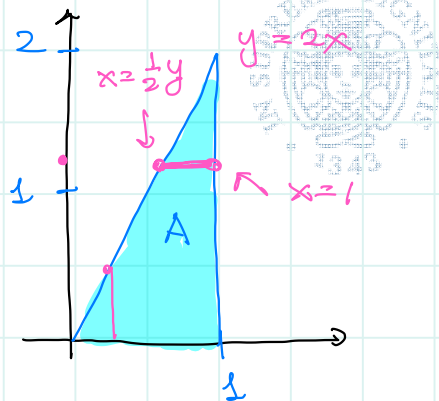
$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} dx f(x, y)$$

Esempio 1

$A =$ triangolo con vertici in

$$(0,0), (1,0), (1,2)$$

$$f(x,y) = x^2 y^3$$



L'insieme A è normale rispetto all'asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A x^2 y^3 dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy x^2 y^3 = \int_0^1 x^2 dx \int_0^{2x} y^3 dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 x^2 dx [y^4]_{y=0}^{y=2x} = 4 \int_0^1 x^6 dx = 4 \left[\frac{x^7}{7} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \boxed{\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

In alternativa, l'insieme A è normale rispetto all'asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, \frac{1}{2}y \leq x \leq 1\}$$

$$\iint_A x^2 y^3 dx dy = \int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx x^2 y^3 = \int_0^2 y^3 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 x^2 dx$$

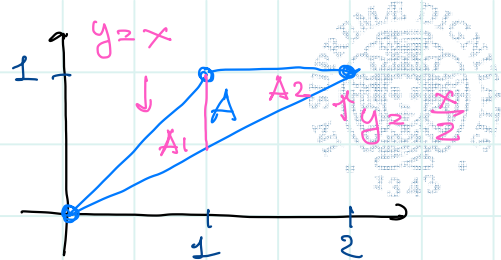
$$= \frac{1}{3} \int_0^2 y^3 dy [x^3]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} = \frac{1}{3} \int_0^2 y^3 (1 - \frac{1}{8}y^3) dy$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^2 (y^3 - \frac{y^6}{8}) dy = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{8} \frac{1}{7} y^7 \right]_0^2$$

$$= \frac{1}{3} \left[4 - \frac{16}{7} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{12}{7} = \boxed{\frac{4}{7}} \quad \text{😊}$$

Oss. Ancora una volta è venuto lo stesso risultato con due procedimenti diversi

Esempio 2 $A =$ triangolo con vertici in
 $(0,0), (1,1), (2,1)$
 $f(x,y) = (x,y)$



Scriviamo A come insieme normale.

Se lo voglio come normale ass x , devo spezzare in 2

$$A = A_1 \cup A_2 \quad \text{con} \quad A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq x \leq 1, \frac{x}{2} \leq y \leq x\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 1 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} \leq y \leq 1\}$$

e quindi l'integrale diventa

$$\iint_A (x+y) dx dy = \int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^x dy (x+y) + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^1 dy (x+y)$$

additività rispetto zona integrazione

In alternativa posso vedere A come normale rispetto asse y

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2: 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq 2y\}$$

$$\begin{aligned} \iint_A (x+y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2y} (x+y) dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} + xy \right]_{x=y}^{x=2y} \\ &= \int_0^1 (2y^2 + 2y^2 - \frac{1}{2}y^2 - y^2) dy = \frac{5}{2} \int_0^1 y^2 dy = \boxed{\frac{5}{6}} \end{aligned}$$

[controllare che venga lo stesso nell'altro modo]

— o — o —