



INTEGRALI DOPPI

- ① Come si indicano
- ② Significato geometrico
- ③ Idea della definizione
- ④ Come si calcolano

1 Notazioni

$$\iint_A \boxed{f(x,y)} \boxed{dx dy}$$

$\uparrow$ funzione INTEGRANDA
 $\uparrow$ zona di integrazione
 $\uparrow$ variabili rispetto a cui integriamo

Intendiamo che $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

Spesso si scrive con un solo integrale $\int_A f(x,y) dx dy$

Integrali PROPRI

→ l'insieme A è limitato

→ la funzione $f(x,y)$ è limitata, cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |f(x,y)| \leq M \quad \forall (x,y) \in A$$

(il grafico sta nella striscia $-M \leq z \leq M$)

Integrali IMPROPRI

se fallisce una o entrambe le condizioni di sopra

Esempi Se $A = [0,1] \times [0,1]$ e $Q = [0,+\infty) \times [0,+\infty)$, allora

$$\iint_A (x^2 + 3xy) dx dy \quad \text{PROPRIO}$$

$$\iint_Q \frac{1}{x^2+y^2+1} dx dy$$

$\uparrow$ IMPROPRIO PER COLPA

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2} dx dy$$

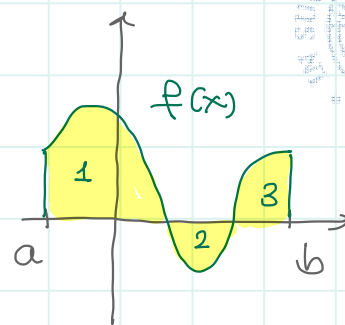
$\uparrow$ IMPROPRIO PER COLPA di $f(x,y)$

DELL'INSIEME (la funzione sarebbe limitata)

[2] Significato geometrico

Analisi 1 $\int_a^b f(x) dx =$ "area con segno che sta tra il grafico e l'asse x "

$$= \text{Area 1} + \text{Area 3} - \text{Area 2}$$



Analisi 2 $\iint_A f(x,y) dx dy =$ "volume con segno tra grafico e piano base"

- se $f(x,y) \geq 0$ in A , allora è il volume della parte di spazio che sta sopra il piano base xy e sotto il grafico di $f(x,y)$, ovviamente limitandosi agli $(x,y) \in A$,
- se $f(x,y)$ ha parti $+$ e parti $-$, allora i volumi delle parti con $f(x,y) \geq 0$ contano con il segno $+$, i volumi delle parti con $f(x,y) \leq 0$ contano con il segno $-$.

[3] Idea della definizione

- Ci sono 3 casi:
- caso banale
 - caso semi-banale
 - caso generale

[3.1] Caso banale: l'insieme $A = [a,b] \times [c,d]$ (rettangolo)
 $f(x,y) = \lambda$ (costante) per ogni $(x,y) \in A$

Stiamo in pratica calcolando il volume di un parallelepipedo

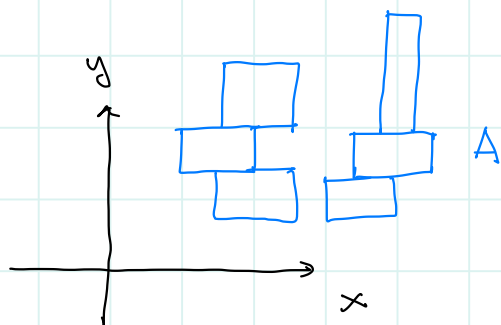
$$\iint_A f(x,y) dx dy = \boxed{(b-a)(d-c)} \cdot \boxed{\lambda}$$

$\uparrow$ Area rettangolo di base $\nwarrow$ "altezza" con segno

3.2 Caso semi banale

A = unione finita di rettangoli (che si toccano al max sul bordo)

f = costante, eventualmente diversa da rettangolo a rettangolo.



Indichiamo con $R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e con λ_i i valori costanti in ogni rettangolo.

Il grafico diventa "un sistema di edifici o scavi a forma di parallelepipedo"

In questo caso si pone

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \text{"somma con segno dei volumi"}$$

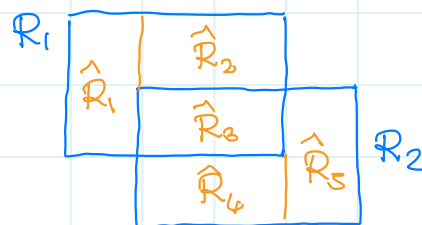
$$= \sum_{i=1}^n \underbrace{(b_i - a_i)(d_i - c_i)}_{\text{Area}(R_i)} \underbrace{\lambda_i}_{\text{altezza con segno}}$$

Queste funzioni si chiamano "funzioni a gradino" oppure "STEP FUNCTIONS"

Oss. Le combinazioni lineari di funzioni del caso banale (funzioni caratteristiche di rettangoli) sono step function.

Oss. Se sommo una funzione che vale λ_1 in un rett. R_1 e
" " " " λ_2 " " " R_2
otengo sempre una step function, anche se R_1 ed R_2 si intersecano di brutto.

Basta pensarla scomposta in un numero maggiore di rettangoli



3.3] Caso generale

$A =$ insieme LIMITATO qualunque

$f =$ funzione LIMITATA qualunque

In questo caso si costruiscono le SOMME DI DARBOUX superiori e inferiori e si pone

$$I^+(A, f) = \text{"integrale superiore di } f \text{ in } A"$$

$$= \inf \left\{ \iint_B \varphi(x, y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi \geq f \text{ in } A \right\}$$

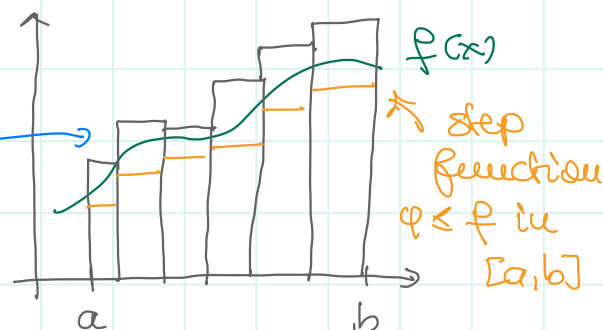
dove $\uparrow$
 B è definita

$$I^-(A, f) = \text{"integrale inferiore di } f \text{ in } A"$$

$$= \sup \left\{ \iint_B \varphi(x, y) dx dy : \varphi \text{ è una step function e } \varphi \leq f \text{ in } A \right\}.$$

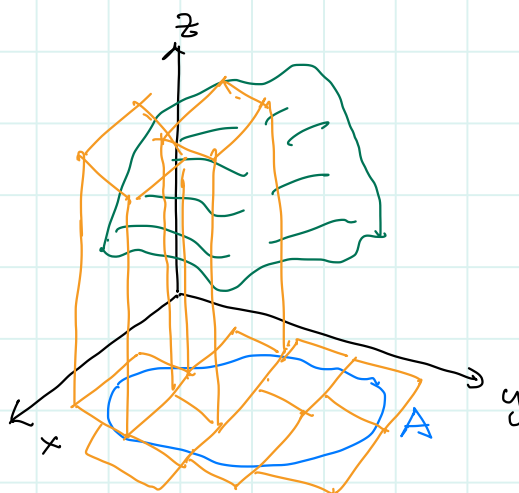
Analogo di Analisi 1

step function
 $\varphi \geq f$ in $[a, b]$

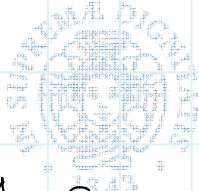


Ad analisi 2 la situazione è più fastidiosa perché i rettangoli possono dover sfiorare rispetto all'insieme A .

Se l'insieme A è "fatto male" gli sfioramenti sono necessari.



In generale accade che $I^-(f, A) \leq I^+(f, A)$



Se sono uguali, si dice che $f(x, y)$ è integrabile in A e il valore comune è l'integrale

$$\iint_A f(x, y) dx dy = I^+(f, A) = I^-(f, A)$$

↑
se questo accade

Oss. Le ipotesi A limitato + f limitata servono per garantire l'esistenza di almeno una step function $\varphi \geq f$ e " " " " " $\varphi \leq f$

"Teorema" Se l'insieme A non è fatto troppo male e f è continua in A , allora f è integrabile in A .

Proprietà dell'integrale

① Linearità

$$\iint_A (f+g) dx dy = \iint_A f dx dy + \iint_A g dx dy$$
$$\iint_A \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_A f(x, y) dx dy$$

↑
numero

② Monotonia Se $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$, allora

$$\iint_A f(x, y) dx dy \geq 0$$

[quindi se $f \geq g$, anche $\iint_A f dx dy \geq \iint_A g dx dy$]

o si intersecano solo al bordo

③ Additività rispetto zona di integrazione Se $A \cap B \stackrel{j}{=} \emptyset$, allora

$$\iint_{A \cup B} f(x, y) dx dy = \iint_A f(x, y) dx dy + \iint_B f(x, y) dx dy$$