



STUDIO LOCALE DI PUNTI STAZIONARI

Esempio 1 $f(x,y) = x + y^3 - x^2 y^2$ Det. i p.ti stat. e classificarli

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2xy^2 = 0 \\ 3y^2 - 2x^2 y = 0 \end{cases}$$

2^a equ: $y(3y - 2x^2) = 0$ $\rightarrow y = 0 \rightarrow$ incompatibile con 1^a equ
 $\rightarrow y = \frac{2}{3}x^2 \rightarrow$ sostituisco nella 1^a

$$1 = 2xy^2 = 2x \frac{4}{9} x^4 = \frac{8}{9} x^5 \rightarrow x^5 = \frac{9}{8}$$

$$\rightarrow x = \sqrt[5]{\frac{9}{8}} \quad y = \frac{2}{3} \sqrt[5]{\frac{81}{64}} \rightarrow \text{esiste un unico p.to stat.}$$

Classifichiamo il p.to. $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2y^2 & -4xy \\ -4xy & 6y - 2x^2 \end{pmatrix}$

$$\text{Det} = -12y^3 + 4x^2 y^2 - 16x^2 y^2 = -12y^3 - 12x^2 y^2$$

Sostituendo il p.to stazionario, che ha $x > 0$ e $y > 0$, troviamo
 $\text{Det} < 0 \Rightarrow$ autovalori $= + - \Rightarrow$ il punto è una sella

Oss. Finché la matrice Hf ha autovalori $\neq 0$, il metodo funziona
 $\downarrow$ problemi nascono quando ci sono autovalori nulli

Esempio 2 $f(x,y) = \sin(xy) + \cos y$. Dimostrare che $(0,0)$ è stazionario e classificarlo.

Taylor: $f(x,y) = xy + 1 - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$
 $= 1 + xy - \frac{1}{2}y^2 + o(x^2 + y^2)$

$(0,0)$ è stazionario perché non ci sono x e y .

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dots + xy - \frac{1}{2}y^2 + \dots$$

$\text{Det} < 0 \Rightarrow (0,0)$ è p.to di sella.

$$\dots + \frac{1}{2} [f_{xx} \cdot x^2 + 2f_{xy}xy + f_{yy} \cdot y^2]$$

Per esercizio provare calcolando le derivate!

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 \sin y + xy \arctan(x^2)$

Dim. che l'origine è stazionario e classificarlo.

Taylor di ordine 4 per esercizio:

$$f(x,y) = x^2y + x^3y + o((x^2+y^2)^2)$$

In particolare vediamo che $\nabla f(0,0) = (0,0) \Leftrightarrow$

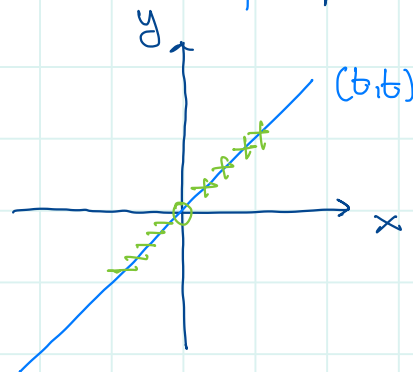
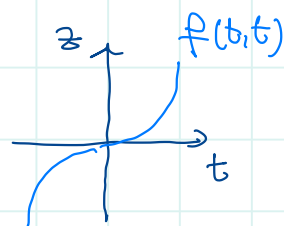
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Hf non ci dice nulla

Usiamo un omino $f(t,t) = t^2 \sin t + t^2 \arctan(t^2)$
 $= t^3 + o(t^3)$

$\leadsto f(t,t)$ ha un flesso ascendente nell'origine.

Questo basta per concludere che $(0,0)$ non è p.to di max/min



FATTO GENERALE se Hf è nulla,

ma i primi termini non nulli nello sviluppo di Taylor sono di grado

DISPARI, allora il p.to non è

max o min. Basta mandare omini del tipo (t, at) per scoprirlo.

Esempio 4 $f(x,y) = xy^2 - yx^2 + \sin(x^2y^2) + \log(1+x^5)$

Taylor: $f(x,y) = \boxed{xy^2 - yx^2} + o(p^3)$
ordine 3

$f(t,t) = t^3 - t^3 + o(t^3) = \text{ARGH!!}$

$f(t,2t) = 4t^3 - 2t^3 + o(t^3) = \underbrace{2t^3}_{\substack{\uparrow \\ \text{cambia segno come prima}}} + o(t^3) \quad \therefore$

Esempio 4 (Derivate precedenti) $x^2 \pm y^4$ ($Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$),
ma il comportamento è diverso

Esempio 5 $f(x,y) = x \sin x + \arctan(y^4) + y^3$
(0,0) è stazionario $\leadsto$ classificarlo

Taylor $f(x,y) = x^2 - \frac{1}{6}x^4 + y^4 + y^3 + o(p^4) + o(p^5)$

$\nabla f(0,0) = 0 \quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \therefore$ (mai pensare $Hf \geq 0 \Rightarrow$ p.to min.)

Mando un cammino parabolico

$f(t^2,t) = t^4 + t^4 + t^3 + o(t^4) = t^3 + o(t^4)$
 $\uparrow$
cambia segno

$\Rightarrow (0,0)$ non è max/min.

Oss. Anche $f(0,t) = t^3 + o(t^4)$ andava bene

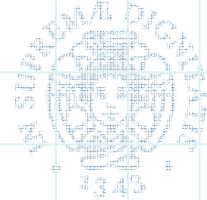
Esempio 6 $x^2 + y^4 + x^3$ (questo è già il Taylor finale)

Ora l'origine è un p.to di min. locale

Posso scrivere

$$f(x,y) = x^2 \underbrace{(1+x)} + y^4$$

> 0 per x vicini a 0
(anzi, per ogni $x > -1$)



Quindi per $x > -1$ vale che $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$

$\uparrow$
e vale il segno di uguale
se e solo se $x=0$ (in
questa zona)

Esempio 7

$$x^2 + y^4 + x^2 y$$

$$x^2 + y^4 + x y^2$$

$$x^2(1+y) + y^4$$

per $y > -1$ vale ancora

$$f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$$

$$= x^2 + x y^2 + \frac{y^4}{4} + \frac{3}{4} y^4$$

$$= \left(x + \frac{y^2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} y^4$$

$\downarrow$

$f(x,y) \geq 0$ e vale il
segno di $=$ se e solo se
 $(x,y) = (0,0)$

$$x^2 + y^4 + 3x y^2$$

$$\text{Mauro } f(-t^2, t) = t^4 + t^4 - 3t^4 = -t^4$$

$$f(t, 0) = t^2$$

$\leadsto$ vede un max

$\leadsto$ vede un min

$\Rightarrow (0,0)$ è un p.to di sella