



$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} q(R) + o(\|R\|^2)$$

↑ forma quadratica
associata a $Hf(x_0)$

Fatto 1 Se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0) > 0$, allora x_0 è pto di min. loc.

Dalla formula abbiamo che $f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(R) + r(R)$

dove

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{r(R)}{\|R\|^2} = 0$$

Limite di n
variabili

Ora la forma q è coerciva, cioè esiste $m > 0$ t.c.

$$q(R) \geq m \|R\|^2 \quad \forall R \in \mathbb{R}^n$$

ma allora

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) - f(x_0) &= \frac{1}{2} q(R) + r(R) \\ &\geq \frac{m}{2} \|R\|^2 + r(R) \\ &= \|R\|^2 \left\{ \frac{m}{2} + \frac{r(R)}{\|R\|^2} \right\} \end{aligned}$$

Dal limite precedente sappiamo che

$$\exists r_0 > 0 \text{ t.c. } \frac{r(R)}{\|R\|^2} \geq -\frac{m}{4} \quad \text{se } \|R\| \leq r_0$$

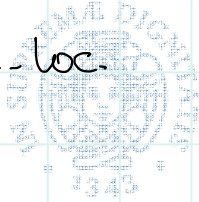


e quindi

$$f(x_0 + R) - f(x_0) \geq \|R\|^2 \left\{ \frac{m}{4} \right\} \geq 0 \quad \forall R \text{ con } \|R\| \leq r_0$$

Quindi $f(x_0 + R) \geq f(x_0)$ in $B(x_0, r_0)$, con $>$ fuori dal centro

Fatto 2 Se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0) < 0$, allora x_0 è p.to di max-loc.



Come prima $f(x_0 + R) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(R) + r(R)$

Analogamente a prima $q(R) \leq \boxed{-m} \|R\|^2$ con $m > 0$
 $\uparrow$ grande autovalore di $Hf(x_0)$

e quindi

$$\begin{aligned} f(x_0 + R) - f(x_0) &= \frac{1}{2} q(R) + r(R) \\ &\leq -\frac{1}{2} m \|R\|^2 + r(R) \\ &= \|R\|^2 \left\{ -\frac{m}{2} + \frac{r(R)}{\|R\|^2} \right\} \end{aligned}$$

Ora scegliamo $r_0 > 0$ t.c.

$$\frac{r(R)}{\|R\|^2} \leq \frac{m}{4} \quad \forall R \text{ con } \|R\| \leq r_0 \quad (R \neq 0)$$

e concludiamo che

$$f(x_0 + R) - f(x_0) \leq \|R\|^2 \left(-\frac{m}{4} \right) \leq 0 \quad \text{se } \|R\| \leq r_0$$

da cui $f(x_0 + R) \leq f(x_0)$ con $<$ stretto se $R \neq 0$ e $\|R\| \leq r_0$

Fatto 3 Se $\nabla f(x_0) = 0$ e $Hf(x_0)$ è indefinita, allora x_0 non è né p.to di max, né p.to di min.

Per ipotesi sappiamo che esiste $R_1 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(R_1) > 0$

ed esiste $R_2 \in \mathbb{R}^n$ t.c. $q(R_2) < 0$

Consideriamo gli vettori $x_0 + tR_1$ e $x_0 + tR_2$

$$\begin{aligned} f(x_0 + tR_1) &= f(x_0) + \frac{1}{2} q(tR_1) + o(\|tR_1\|^2) \\ &= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{q(R_1)}_{>0} + o(t^2) \end{aligned}$$



Assoziamente $f(x_0 + tQ_2) = f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 \underbrace{q(Q_2)}_{\leq 0} + o(t^2)$

da cui $f(x_0 + t\alpha) < f(x_0)$ per $t \neq 0$ piccolo (questo avviene
vede un max)

Oss. In maniera del tutto analoga si ottiene che

→ se c'è un autovalore +, allora x_0 non può essere p.to di max

μ

Funzioni vettoriali

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$$

↑ più variabili de arrivo

Come dire che f ha m componenti

$$f = (f_1, \dots, f_m)$$

La definizione di differenziale non cambia molto.

Diciamo che f è differenziabile in x_0 se esiste una matrice A t.c.

$$f(x_0 + \Delta) = f(x_0) + A\Delta + o(\|\Delta\|)$$

vettore n -dimensionale

Vettore n dim.

vettore
 n -dimensionale

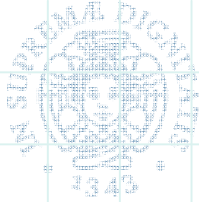
m right
n column

Le righe di A sono i gradienti delle componenti di f .

Def. la matrice A si dice JACOBIANA della funzione f in x_0 e si indica con

$$A = J_F(x_0)$$

CHAIN RULE



Analisi 1 Data $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, allora

$$[g(f(x))]' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Analisi 2 Data $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, allora

$$\boxed{J(g(f(x)))} = \boxed{[Jg](f(x))} \boxed{[Jf](x)}$$

$\begin{matrix} n & m & m \\ \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \\ k & k & m \end{matrix}$

Caso MOLTO SPECIALE: sia data $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Poniamo

funzioni date

$$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$$

Chi è la derivata di φ ?

$$\varphi'(t) = f_x(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \dot{y}(t)$$

Proseguendo si trova che

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= [f_x(x(t), y(t))]' \dot{x}(t) + f_x(x(t), y(t)) \ddot{x}(t) \\ &\quad + [f_y(x(t), y(t))]' \dot{y}(t) + f_y(x(t), y(t)) \ddot{y}(t) \\ &= f_{xx}(x(t), y(t)) \dot{x}(t)^2 + 2f_{xy}(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \dot{x}(t) \\ &\quad + f_{yy}(x(t), y(t)) \dot{y}(t)^2 \\ &\quad + f_x(x(t), y(t)) \ddot{x}(t) + f_y(x(t), y(t)) \ddot{y}(t) \end{aligned}$$

Esercizio Interpretare in termini di Chain rule.

Dalla Chain Rule a Taylor



Consideriamo $\varphi(t) = f(tx, ty)$, in cui pensiamo x e y fissati e t variabile.

Allora, per Taylor-Lagrange di Analisi 1:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} \varphi''(c) t^2$$

e ponendo $t=1$ si ottiene

$$\begin{array}{rcl} \varphi(1) & = & \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(c) \\ \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ f(x,y) & = & f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y \end{array}$$

$$\varphi(t) = f(tx, ty) \leadsto \varphi'(t) = f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y$$

$$\varphi''(tx, ty) = f_{xx}(tx, ty)x^2 + 2f_{xy}(tx, ty)xy + f_{yy}(tx, ty)y^2$$

$$\text{e quindi } \frac{1}{2} \varphi''(c) = \frac{1}{2} [f_{xx}(\dots)x^2 + 2f_{xy}(\dots)xy + f_{yy}(\dots)y^2]$$

$\uparrow$
 (cx, cy) che è un punto del
segmento che congiunge $(0,0)$
con (x,y) .

Procedendo allo stesso modo con le derivate di φ si ottengono gli sviluppi di f di ogni ordine con resto di Lagrange.