

POLINOMI DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sotto opportune ipotesi di regolarità valgono formule del tipo

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + r_n(x)$$

derivata n-esima
↓
 $f^{(n)}$
↑
resto

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)$$

dove $r_n(x) = o(x^n)$ per $x \rightarrow 0$ (resto di Peano)

oppure

$$r_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}$$

(resto alla Lagrange)
↑
p.to misteriosa tra 0 e x.

Se il centro è in $x_0 \neq 0$ la formula diventa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + \dots + o(h^n)$$

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Sotto opportune ipotesi

$$\begin{aligned} f(x, y) = & f(0, 0) \\ & + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y \\ & + \frac{1}{2!} [f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2] \\ & + \frac{1}{3!} [f_{xxx}(0, 0)x^3 + 3f_{xxy}(0, 0)x^2y \\ & \quad + 3f_{xyy}(0, 0)xy^2 + f_{yyy}(0, 0)y^3] \end{aligned}$$

e così via

$$+ r_n(x, y)$$

dove

$$r_n(x, y) = o((\sqrt{x^2 + y^2})^n) = o(\rho^n) \quad (\text{resto alla Peano})$$

oppure analogo con resto alla Lagrange.

[Oss] I termini di grado k che compaiono nello sviluppo sono analoghi a quelli che compaiono calcolando $(x+y)^k$.

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(0,0) x^i y^{k-i}$$

Cosa succede in 3 variabili?

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(0,0,0) \\ &+ f_x(0,0,0)x + f_y(0,0,0)y + f_z(0,0,0)z \\ &+ \frac{1}{2} [f_{xx}(\dots)x^2 + f_{yy}(\dots)y^2 + f_{zz}(\dots)z^2 \\ &\quad + 2f_{xy}(\dots)xy + f_{xz}(\dots)xz + f_{yz}(\dots)yz] \\ &+ \frac{1}{3!} [\dots] \end{aligned}$$

$\swarrow$ come se expandessi $(x+y+z)^3$

Con p.to base diverso dall'origine con calcolata nulla, ad esempio

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) \\ &+ f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k \\ &+ \frac{1}{2!} \{ f_{xx}(x_0, y_0)h^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)hk \\ &\quad + f_{yy}(x_0, y_0)k^2 \} \\ &+ o(h^2 + k^2) \quad \leftarrow \text{resto alla Peano} \\ &= f(x_0, y_0) \\ &+ \langle \nabla f(x_0, y_0), (h, k) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} (h, k) H f(x_0, y_0) \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2 + k^2) \end{aligned}$$

In notazione vettoriale possiamo scrivere Taylor - Peano come

$$f(x_0 + R) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), R \rangle + \frac{1}{2} R^T Hf(x_0) R + o(\|R\|^2)$$

Oss. Se ci fermavamo all'ordine 1 diventava esattamente la definizione di differenziale.

Come calcolo gli sviluppi di Taylor? Come ad Analisi 1, a partire dagli sviluppi delle funzioni elementari.

Esempio 1 $f(x, y) = (x+2y) \sin(xy) + y \cos(x^2)$

Voglio Taylor di ordine 8.

$$(x+2y) \left(xy - \frac{1}{6} x^3 y^3 \right) + y \left(1 - \frac{1}{2} x^4 + o(x^4) \right) + o((x^2+y^2)^4)$$

$\underbrace{\sin t = t - \frac{1}{6} t^3 + o(t^4)}$

$$= x^2 y + 2xy^2 - \frac{1}{6} x^4 y^3 - \frac{1}{3} x^3 y^4 + y - \frac{1}{2} x^4 y + o((x^2+y^2)^4)$$

$$= y + x^2 y + 2xy^2 - \frac{1}{2} x^4 y - \frac{1}{6} x^4 y^3 - \frac{1}{3} x^3 y^4 + o((x^2+y^2)^4)$$

Domanda: chi è $Hf(0,0)$? È $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

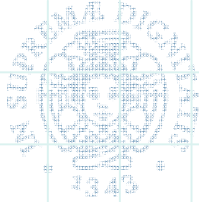
Infatti $f_{xx}(0,0)$, $f_{yy}(0,0)$ e $f_{xy}(0,0)$ compaiono nel polinomio davanti a x^2 , y^2 , xy , ma questi "non ci sono", quindi i coeff. sono nulli.

Taylor di ordine 6 della stessa funzione:

$$= y + x^2 y + 2xy^2 - \frac{1}{2} x^4 y + o((x^2+y^2)^3)$$

Esempio 2 $f(x,y) = e^{xy} \sin(x-y^3)$

Taylor di ordine 5



Ricordiamo che $e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + \dots$

$\sin t = t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 - \dots$

$$e^{xy} \sin(x-y^3) = \left(1 + xy + \frac{1}{2}x^2y^2\right) \left(\underbrace{x-y^3}_t - \frac{1}{6}\underbrace{(x^3-3x^2y^3)}_{-\frac{1}{6}t^3} + \frac{1}{120}\underbrace{x^5}_{+\frac{1}{5!}t^5}\right)$$

$$= x - y^3 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y^3 + \frac{1}{120}x^5 + x^2y - xy^4 - \frac{1}{6}x^4y + \frac{1}{2}x^3y^2$$

$$+ o((x^2+y^2)^{5/2})$$

Se ci possiamo limitare all'ordine 3
troviamo

tutti gli altri termini
sono del grado 6 in poi

$$e^{xy} \sin(x-y^3) = x - \frac{1}{6}x^3 - y^3 + x^2y + o((x^2+y^2)^{3/2})$$

Calcolare le seguenti derivate $f_{xy}(0,0)$, $f_{xxy}(0,0)$, $f_{yyy}(0,0)$
 $f_{xyy}(0,0)$.

$f_{xy}(0,0) = f_{xyy}(0,0) = 0$ (nello sviluppo "non ci sono" xy e xy^2)

Per le altre 2 ricordiamo il termine di ordine 3 nello sviluppo

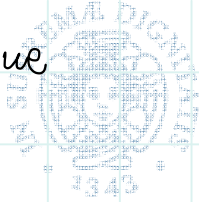
$$f(x,y) = \dots + \frac{1}{6} [f_{xxx}(0,0)x^3 + 3f_{xxy}(0,0)x^2y + 3f_{xyy}(0,0)xy^2 + f_{yyy}(0,0)y^3] + \dots$$

$$= \dots - \frac{1}{6}x^3 - y^3 + x^2y$$

Confrontando troviamo

$f_{xxx}(0,0) = -1$, $f_{yyy}(0,0) = -6$, $f_{xxy}(0,0) = 2$

Achtung! Questa condizione vale solo in $(0,0)$, o comunque nel p.to in cui si sta sviluppando



Esempio 3 $f(x,y) = \log(1+x^2y) \cdot \arctan(x+y^2)$

Ordine 7

Ricordiamo $\log(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{4}t^4 + \dots$

$$\arctan t = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \dots$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \left(x^2y - \frac{1}{2}x^4y^2 \right) \left(x+y^2 - \frac{1}{3}(x^3+3x^2y^2) \right) + o(p^7) \\ &= x^3y + x^2y^3 - \frac{1}{3}x^5y - x^4y^3 - \frac{1}{2}x^5y^2 + o((x^2+y^2)^{7/2}). \end{aligned}$$

Oss. Il p.to $(0,0)$ è stazionario e $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Non ci sono i
termini di grado 1

Non ci sono i
termini di grado 2

— 0 — 0 —