

Derivate successive per funzioni di più variabili

$$f(x, y) = x^2 \sin y$$

$$f_x = 2x \sin y$$

$$f_y = x^2 \cos y$$

$$f_{xx} = (2x \sin y)_x = 2 \sin y$$

$$f_{yx} = (x^2 \cos y)_x = 2x \cos y$$

$$f_{xy} = (2x \sin y)_y = 2x \cos y$$

$$f_{yy} = (x^2 \cos y)_y = -x^2 \sin y$$

Oss. Per una funzione di n variabili, le derivate prime sono n , quelle seconde n^2 , quelle terze n^3 ... APPARENTEMENTE

TEOREMA DI SCHWARZ

Sotto opportune ipotesi (verificate praticamente sempre, ad esempio se le derivate in questione sono continue) le derivate MISTE sono uguali.

Conseguenza Per una funzione di 2 variabili

→ le derivate prime sono 2

→ " " seconde sono 3

→ " " terze sono 4 ($f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}$)

→ " " k -esime sono $k+1$ (conta solo quante volte derivi rispetto ad x)

Notazione

$$\frac{\partial^{14} f}{\partial x^{14} \partial y^{12}}$$

= derivare f 14 volte rispetto ad x
e 12 volte rispetto ad y

(l'ordine di esecuzione delle operazioni non importa)

Matrice HESSIANA

Consideriamo le derivate parziali seconde.

In due variabili abbiamo f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

↑
matrice simmetrica

In tre variabili abbiamo

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

↑
matrice 3x3 simmetrica

e così via in ogni numero di variabili.

Brutalmente: → con le deriv. parz. prime costruiamo ∇f
→ " " " " seconde " Hf .

La derivata prima di Analisi I diventa il gradiente
" " seconda " " " " la matrice Hessiana.

STUDIO LOCALE DI UN PONTO STAZIONARIO

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 (derivata seconda continua)
Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ un p.to stazionario ($f'(x_0) = 0$).

Allora valgono le seguenti implicazioni:

(i) x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \geq 0$

(ii) x_0 p.to di max. loc. $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$

(iii) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.

(iv) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.

Achtung! Se $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ NON SI PUÒ DIRE NULLA.

Oss. Vale anche se f è definita solo su un intervallo.

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 (vale anche se è
Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ un p.to stat. ($\nabla f(x_0) = 0$) definita solo in un aperto)

Allora valgono le seguenti implicazioni.

(i) x_0 p.to di min. loc. $\Rightarrow Hf(x_0) \geq 0$ (semidef. positiva)

(ii) " max " $\Rightarrow Hf(x_0) \leq 0$

(iii) $Hf(x_0) > 0$ (def. posit.) $\Rightarrow x_0$ p.to di min. loc.

(iv) $Hf(x_0) < 0$ (def. neg.) $\Rightarrow x_0$ p.to di max. loc.

(v) $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow x_0$ non è né max né min,
ma un p.to di sella.

Achtung! Se la matrice è solo semidefinita non si può
dedurre MOLTO.

Esempio 1 $f(x, y) = x^2 - y^2$ $f_x = 2x$ $f_y = -2y$
 $f_{xx} = 2$ $f_{xy} = 0$ $f_{yy} = -2$

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ L'origine $(0, 0)$ è p.to stazionario
 $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$

$Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, quindi indefinita $\Rightarrow (0, 0)$ p.to di sella

Esempio 2 $f(x, y) = xy$ $f_x = y$ $f_y = x$
 $f_{xx} = 0$ $f_{xy} = 1$ $f_{yy} = 0$

$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\det = -1 \leadsto$ autovalori: $+$ $-$

$\Rightarrow (0, 0)$ è un p.to stazionario e $Hf(0, 0)$ è indefinita

$\Rightarrow (0, 0)$ è un p.to di sella.

Esempio 3 $f(x,y) = x^2 + y^4$

Si vede facilmente che $(0,0)$ è un p.to di min. loc. (e anche globale). Infatti $f(0,0) = 0$ e $f(x,y) > 0$ per $(x,y) \neq (0,0)$

Proviamo ad applicare la teoria: $f_x = 2x$ $f_y = 4y^3$
 $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 0$, $f_{yy} = 12y^2$

$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$. Ora $\nabla f(0,0) = (0,0) \Rightarrow$ stazionario $\therefore$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$ autovalori sono 2 e 0
 $\rightsquigarrow$ semidefinita positiva

Non avrei potuto usare la matrice $Hf(0,0)$ per dedurre che è un p.to di min. ($Hf \geq 0 \nRightarrow$ p.to di min.)

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 - y^4$. Come prima $\nabla f(0,0) = (0,0)$
 Con conti analoghi

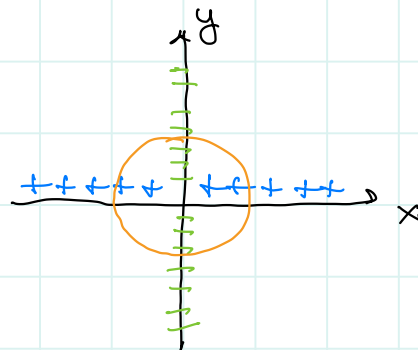
$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 \end{pmatrix}$ quindi $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi è lo stesso di prima. Tuttavia ora $(0,0)$ è un p.to di sella.

$f(t,0) = t^2 \geq 0$ per $t \neq 0$

$f(0,t) = -t^4 < 0$ per $t \neq 0$

Quindi in ogni circolo centrato in $(0,0)$ abbiamo p.ti in cui $f \geq 0$ e punti in cui $f < 0$. Quindi, essendo $f(0,0) = 0$, l'origine non può essere p.to di max/min.



Occhio! Quando ci sono autovalori nulli, l'Hessiano non permette di concludere nulla

Domanda: possiamo fare in modo che $Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
e $\nabla f(0,0) = 0$ e $(0,0)$ è p.to di max. locale?

$f(x,y) = -x^2 + y^4$ non va bene perché $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$
quindi in $(0,0)$ c'è -2 .

La risposta alla domanda è NO! se x_0 è p.to di max. loc.
allora $Hf(x_0)$ è semi-def. neg., quindi NON può avere
autovalori positivi.

Fatto generale: $\rightarrow$ un autovalore $+$ esclude max. loc.
(può essere sella o min. loc.)
 $\rightarrow$ un autovalore $-$ esclude min. loc.
(può essere sella o max. loc.)