

METODO DI SYLVESTER (Metodo dei MINORI ORLATI)

Descrizione del caso standard. Sia A una matrice $n \times n$ simm.

→ Calcolo tutti i determinanti a partire da NW

→ Spero che nessuno venga nullo ☺

→ Scrivo di fila i segni $+$ o $-$ ottenuti

→ Aggiungo un $+$ d'ufficio in testa

→ Miracolo: il numero di PERMANENZE è n_+

il numero di VARIAZIONI è n_-



Esempio

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}_{1 \times 1} = 1$$

$$\text{Det}_{2 \times 2} = -9$$

$$\text{Det}_{3 \times 3} = -18$$

Segui

↓ D'ufficio
 $\begin{matrix} + & + & - & - \\ \underbrace{}_P & \underbrace{}_V & \underbrace{}_P & \end{matrix}$

$$\# \text{autov. } + = \# P = 2$$

$$\# \text{autov. } - = \# V = 1$$

Varianti del metodo

Quello descritto è Sylvester 1-2-3

Le varianti consistono nel procedere in maniera diversa

3-2-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

2-3-1

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

1-3-2

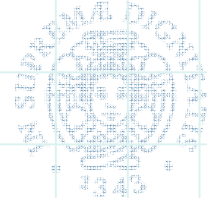
$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

3-1-2

$$\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Torniamo alla matrice iniziale

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$



3-2-1: $\circ$ (Det_{2x2} = 0)

3-1-2: Det_{1x1} = 2

Det_{2x2} = -2

Det_{3x3} = -18

+ + - -
P V P

Morale: posso scegliere l'ordine in cui procedere in modo da evitare gli zeri "on the road".

Esempio

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$q(x,y,z) = 3y^2 + z^2 + 2xy + 4xz$

1-2-3 ? Pessima partenza

3-2-1 ? Det_{1x1} = 1

Det_{2x2} = 3

Det_{3x3} = -13

+ + + -
P P V

gli autovalori sono +- -

Esempio $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$

Come sono fatte le zone di positività e negatività?

$x^2 + y^2 - z^2 > 0$

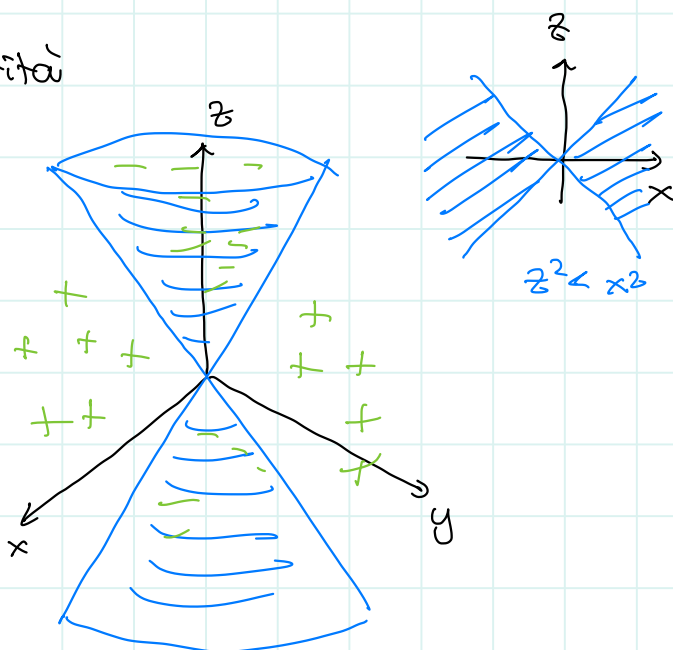
$\Leftrightarrow z^2 < x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow |z| < \sqrt{x^2 + y^2}$

ρ delle coord. polari

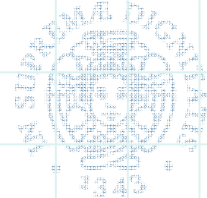
Segno - dentro il cono

Segno + fuori dal cono.



Perché funziona? Vedi lezioni di algebra lineare.

Achtung! Evitare Sylvester creativi $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{NO!!}$



Def. Una forma quadratica si dice COERCIVA se esiste un numero reale $m > 0$ tale che

$$q(x) \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$\uparrow$ minimo tra gli autovalori di A

Oss. Se $q(x)$ è coerciva, allora è definita positiva.

Teorema Vale il viceversa dell'osserv. precedente, cioè le forme quadratiche definite positive sono coercive.

Dim. di Analisi Consideriamo la funzione $R(x) = \frac{q(x)}{\|x\|^2}$ definita per ogni $x \neq 0$.

Questa funzione è 0-omogenea, cioè

$$R(\lambda x) = R(x) \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$\uparrow$ numero $\uparrow$ vettore

Infatti

$$R(\lambda x) = \frac{q(\lambda x)}{\|\lambda x\|^2} = \frac{\lambda^2 q(x)}{\lambda^2 \|x\|^2} = R(x)$$

Quindi $R(x)$ è costante sui tutti i multipli positivi di un vettore, cioè è costante su tutte le semirette che escono dall'origine.

Ora consideriamo

$$\min \{ R(x) : \|x\| = 1 \}$$

sfera unitaria (solo bordo)

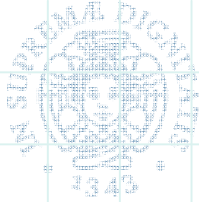
Esiste perché $R(x)$ è continua e la sfera è compatta (W.)

Inoltre (solito discorso) è il valore assunto in un p.to x_0 , cioè

$$\min = R(x_0) = \frac{q(x_0)}{\|x_0\|^2} \uparrow 1 = q(x_0) > 0$$

perché $q(x)$ è definita positiva

Basta porre $m = q(x_0)$ e abbiamo finito



$$R(x) \geq m \text{ sulla sfera} \Rightarrow R(x) \geq m \quad \forall x \neq 0$$

$\uparrow$
o-omog

$$\Rightarrow \frac{q(x)}{\|x\|^2} \geq m \quad \forall x \neq 0 \Rightarrow q(x) \geq m \|x\|^2 \quad \forall x \neq 0$$

e anche per $x=0$.

Dim. di Algebra Lineare $q(x) = x^t A x$ dove A è una matrice simmetrica.

Per il teorema spettrale A è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè esiste M tale che

$$A = M^{-1} D M \quad \text{e} \quad M^{-1} = M^t$$

quindi $A = M^t D M$ e quindi

$$q(x) = x^t M^t D M x = (Mx)^t \underset{\uparrow \text{diagonale}}{D} (Mx)$$

Adesso poniamo $Mx = (v_1, \dots, v_n) = v$. Allora

$$v^t D v = \lambda_1 v_1^2 + \dots + \lambda_n v_n^2$$

Sappiamo che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono tutti positivi (perché A è definita positiva), dunque il minimo tra di loro è un certo $m > 0$, e quindi

$$q(x) = v^t D v \geq m (v_1^2 + \dots + v_n^2) = m \|v\|^2 = m \|Mx\|^2$$

$= m \|x\|^2$
 $\uparrow$ perché M è ortogonale

$$\|Mx\|^2 = (Mx)^t (Mx) = x^t \underbrace{M^t M}_{Id} x = x^t x = \|x\|^2.$$