



FORME QUADRATICHE

Una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è un polinomio di 2° grado omogeneo (solo con i termini di 2° grado) nelle variabili $x_1, \dots, x_n$

Esempi In 3 variabili

$$q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + dxy + eyz + fzx$$

In 2 variabili

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + cxy$$

Si intende che $a, b, \dots$ sono numeri DATI

Oss. Di solito è meglio pensare ai termini misti con un coeff. 2 davanti $q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy$

DOMANDONE

Cosa si può dire del segno di $q(x, y)$ o $q(x, y, z)$ al variare delle variabili?

Definizioni Sia $q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una forma. La forma si dice

• definita positiva se

$$q(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } x \neq 0$$

• semidefinita positiva se

$$q(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

• definita negativa se

$$q(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ con } x \neq 0$$

• semidefinita negativa se

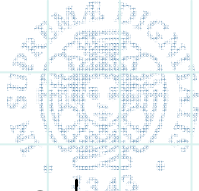
$$q(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

• indefinita se non vale nessuna delle precedenti, dunque

$$\exists x_1 \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } q(x_1) > 0$$

$$\exists x_2 \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } q(x_2) < 0$$

Come stabilisco in quale caso mi trovo?



Matrice associata ad una forma quadratica Ogni forma quad.
si può scrivere nella forma

$$q(x) = x^t A x$$

dove A è una matrice $n \times n$ simmetrica, e x è pensato come vettore colonna.

Esempi In 2 variabili

$$q(x, y) = ax^2 + by^2 + 2cxy = (x \ y) \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(x \ y) \begin{pmatrix} ax+cy \\ cx+by \end{pmatrix}$
 $ax^2 + \underbrace{cxy + cxy}_{2cxy} + by^2$

In 3 variabili

$$q(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2eyz + 2fzx = (x \ y \ z) \begin{pmatrix} a & d & f \\ d & b & e \\ f & e & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ci sono 4 metodi per stabilire in quale caso ci si trova

- ① Completamento dei quadrati
- ② Segno autovalori
- ③ Sylvester in varie forme
- ④ Metodo di CARTESIO

SEGNO AUTOVALORI

Sia A la matrice associata a $q(x)$.

È una matrice simmetrica, dunque per

Alg. lin. ha n autovalori REALI.

- Autovalori tutti $> 0 \rightsquigarrow q(x)$ def. pos. $A > 0$
- " " $\geq 0 \rightsquigarrow q(x)$ semi def. pos. $A \geq 0$
- " " $< 0 \rightsquigarrow q(x)$ def. neg. $A < 0$
- " " $\leq 0 \rightsquigarrow q(x)$ semi def. neg. $A \leq 0$
- autovalori un po' e un po' $\rightsquigarrow q(x)$ indefinita A indef.

Def. Si dice segnatura di una forma una terna di numeri

n_0, n_+, n_- con $n_0 + n_+ + n_-$ dove

$n_0 = \#$ autov. nulli

$n_+ = \#$ autov. positivi

$n_- = \#$ autov. negativi

Oss. Trovare gli autovalori può essere impossibile, ma gli altri metodi permettono di stabilire il segno senza calcolarli.

COMPLETAMENTO DEI QUADRATI

Ogni forma quadratica si può scrivere come somma / differenza di quadrati di espressioni di primo grado linearmente indipendenti. A questo punto

$n_+ = \#$ espressioni sommate (con il segno +)

$n_- = \#$ espressioni sottratte (con il segno -)

$n_0 =$ ciò che viene per differenza ($n_0 = n - n_+ - n_-$)

Esempio 1

$$q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$$

$$= x^2 + 4xy + 4y^2 - 4y^2 + y^2$$

$$= (x + 2y)^2 - 3y^2$$

$$= (\underbrace{x + 2y}_{\text{line. indep.}})^2 - (\underbrace{\sqrt{3}y}_{\text{line. indep.}})^2$$

quindi $n_+ = n_- = 1$
(e quindi $n_0 = 0$)

In alternativa la matrice è $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{Det} = 1 - 4 = -3 = \text{prod. autov.} \leadsto \text{semauro} + e -$.

Esempio 2 $q(x, y, z) = x^2 + 2z^2 + 6xy - 4xz$
 $= x^2 + 6xy - 4xz + 2z^2$
 $= \boxed{x^2} + \boxed{6xy} - \boxed{4xz} + \boxed{9y^2} - 9y^2 + \boxed{4z^2} - 4z^2 + 2z^2$
 $\quad + 12yz - 12yz$
 $= (x + 3y - 2z)^2 - 9y^2 - 2z^2 + 12yz$
 $= (x + 3y - 2z)^2 - 9y^2 + 12yz + 4z^2 - 4z^2 - 2z^2$
 $= (x + 3y - 2z)^2 - (3y - 2z)^2 + 2z^2$

In questo caso $n_+ = 2$ e $n_- = 1$

La matrice sarebbe

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A$$

Potremmo dedurre altrimenti il segno degli autovalori?

$\text{Det} = -18$ (negativo $\leadsto$ autovalori $++-$ oppure $---$)

Traccia = 3 (quindi $---$ non è possibile)

Quindi l'unica possibilità rimasta è $++-$.

Interpretazione geometrica della segnatura

n_+ = massima dimensione di un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

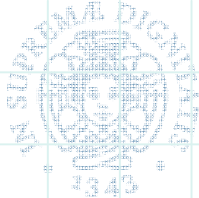
in cui $q(x)$ è definita positiva (cioè $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$ nel sottospazio)

n_- = massima dim. ... $q(x)$ è definita negativa

Esempio 3 $q(x,y) = x^2 + 6xy$

$\text{Det} = -9 \leadsto$ autovalori $+-$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$



In alternativa

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 9y^2 = (x+3y)^2 - (3y)^2$$

Studio il segno di $q(x,y) = x(x+6y)$

