



Esempio 1 Determinare $\inf$ e $\sup$ di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2$ su
 $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 1\}$

Domanda 1 L'insieme A è limitato?

In due variabili l'analogo non è limitato $xy=1$ $\nwarrow$
 quindi tira una brutta aria.

Ad esempio $x = n, y = \frac{1}{n}, z = 1$ con n enorme

☹ Non limitato $\Rightarrow$ Non compatto $\Rightarrow$ nessuna garanzia di
 $\max / \min$.

RISPOSTA 1 $\lim_{t \rightarrow +\infty} f\left(t, \frac{1}{t}, 1\right) = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2 = +\infty$
 sta nell'insieme
 A quando $t \rightarrow \infty$

Questo dice che $\sup = +\infty$ e $\max$ N.E.

Domanda 2 Esiste $\lim_{\substack{\|(x, y, z)\| \rightarrow +\infty \\ (x, y, z) \in A}} f(x, y, z)$?

Sì, esiste anche senza restringersi ad A e fa $+\infty$ (perché
 $f(x, y, z) \geq \rho^2$ delle coord. sferiche)

☺ Weierstrass generalizzato $\Rightarrow$ il minimo esiste.

Dove trovo candidati p.ti min? L'insieme A è "solo bordo"
 e quindi andiamo di moltiplicatori con $g(x, y, z) = xyz - 1$

10 sistemi
 $yz = 0$
 $xz = 0$
 $xy = 0$
 $xyz = 1$

Difficile abbia soluzione...
 (1° e 4° incompatibili)

2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$f_z = \lambda g_z$$

$$g = 0$$

$$2x = \lambda yz$$

$$2y = \lambda xz$$

$$4z = \lambda xy$$

$$xyz = 1$$

· x

· y

· z

$$2x^2 = \lambda xyz = \lambda$$

$$2y^2 = \lambda xyz = \lambda$$

$$4z^2 = \lambda xyz = \lambda$$

Quindi $x^2 = y^2 = 2z^2$, cioè (essendo tutto ≥ 0) $x = y = \sqrt{2}z$

Sostituendo nella quarta $2z^3 = 1$ e da qui ho finito

$$z = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad x = y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$$

Questo è il p.to di minimo !!
—o

In alternativa potevamo "parametrizzare il vincolo" $z = \frac{1}{xy}$
e quindi studiare

$$x^2 + y^2 + \frac{2}{x^2 y^2}$$

al variare di $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Cerchiamo i p.ti stazionari
 $\uparrow$ $\uparrow$
in realtà strettamente

$$2x - \frac{4}{x^3 y^2} = 0$$

$$2x^4 y^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^4 y^2 = x^2 y^4$$

$$2y - \frac{4}{x^2 y^3} = 0$$

$$2x^2 y^4 = 4$$

$$\Downarrow \quad x^2 = y^2$$

$$\Downarrow \quad x = y$$

perché
 $x \geq 0$
e
 $y \geq 0$

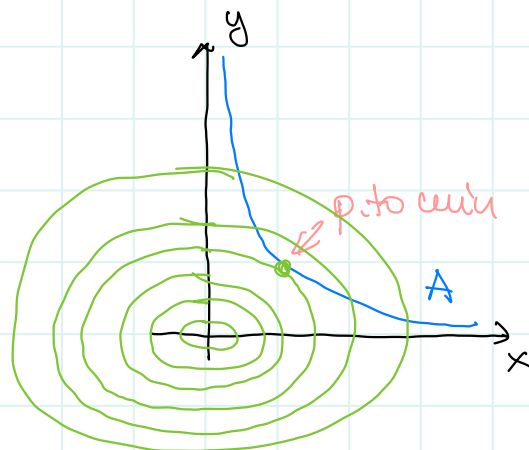
Resta $2x - \frac{4}{x^5} \geq 0 \leadsto x^6 \geq 2 \leadsto x = \sqrt[6]{2}$



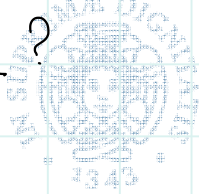
— o — o —

Oss. In versione 1 dim. potrebbe essere
inf e sup di $x^2 + y^2$ su

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, xy = 1\}$$



Cosa resta in + variabili del teorema di esistenza degli zeri?



Analisi 1 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$.

Allora esiste $c \in (a, b)$ t.c. $f(c) = 0$.

Analisi 2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Supponiamo

(i) esiste $x_1 \in A$ dove $f(x_1) < 0$

(ii) esiste $x_2 \in A$ dove $f(x_2) > 0$

(iii) esiste un cammino che percorre una curva continua da x_1 a x_2 restando dentro A .

Allora esiste c nel percorso dell' cammino in cui $f(c) = 0$

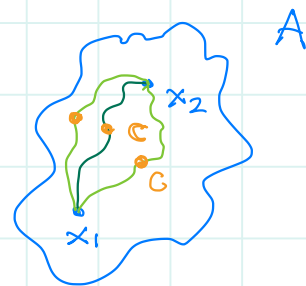
Dim. Se il percorso dell' cammino

è $\underline{x(t)}$ con $t \in [a, b]$

$\uparrow$ vettore

allora la funzione $f(x(t))$ ha

valori di segno opposto nei due estremi.



Occluso Se A è fatto da 2 pezzi, il percorso dell' cammino potrebbe non esistere !!!



Domanda : può essere che il punto di annullamento è unico?

In generale NO : basta che riesca a fare infinite curve che si incontrano solo agli estremi.

Esempio classico $f(x,y) = x + e^{xy} - y^2 + \arctan x$



Dimostrare che $\exists (x,y)$ con $x^2 + y^2 \geq 10^{2021}$ t.c. $f(x,y) = 0$.
(cioè f si annulla su un p.to lontanissimo dall'origine)

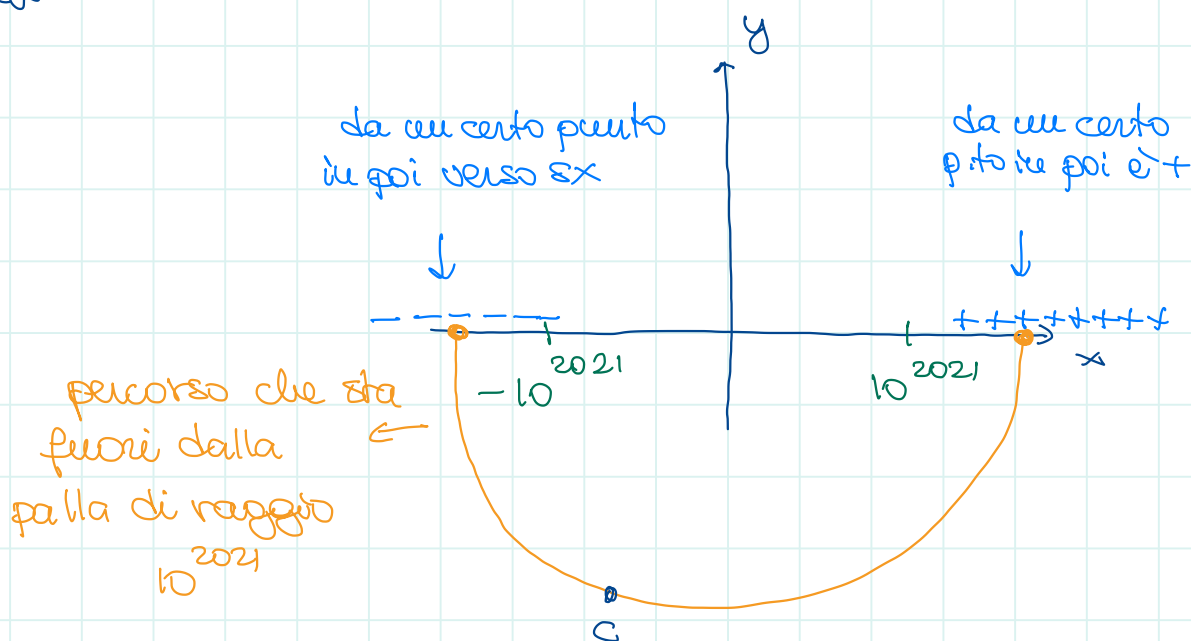
Dici

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = -\infty$$

Questo dice che

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) \text{ N.E.}$$



Per il t.o. prec. esiste un p.to su questo cammino su cui f si annulla

— o — o —