

Tecnica di PAREGGIAMENTO DEGLI ESPONENTI

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{xy}{x^2+y^4}$

Astenersi da discorsi a θ fisso, del tipo

$$\frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta} = \frac{\cos \theta \sin \theta}{\cos^2 \theta + \rho^2 \sin^4 \theta}$$

così si sta fissando θ , cioè si va lungo la retta.

- Se $\sin \theta \neq 0$, allora c'è ρ^2 al denominatore e tende a 0
- Se $\sin \theta = 0$, allora è 0 sopra e 1 sotto, quindi fa 0.

Facciamo un cambio di variabili in modo da "pareggiare gli esponenti"

$$x = u^2 \quad y = v$$

Il limite "diventa"

$$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty} \frac{u^2 v}{u^4 + v^4}$$

Su questo posso procedere in coord. polari con le solite storie

$$0 \leq \frac{\rho^3 |\cos^2 \theta \sin \theta|}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \leq \frac{1}{\rho} \frac{1}{m_0} \quad \text{e si conclude}$$

C'è il problema che se mettiamo $x = u^2$, per forza x è positivo.

La cosa va di sicuro bene se facciamo il limite nel 1° quadrante

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{xy}{x^2+y^4} = \lim_{\substack{u^2+v^2 \rightarrow +\infty \\ u \geq 0, v \geq 0}} \frac{u^2 v}{u^4 + v^4}$$

Ci sono due vie di uscita:

→ osservare che basta fare il limite di $\frac{|x| \cdot |y|}{x^2+y^4}$ e ora $|x| = u^2$ non crea problemi

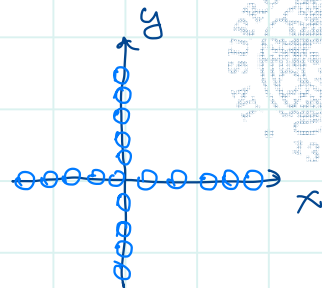
→ osservare che la funzione è simmetrica per cui quello che accade nel 1° quadrante si ripete sugli altri.

Esempio 2

line
 $(x,y) \rightarrow (0,0)$

$$\frac{xy}{x^2+y^4}$$

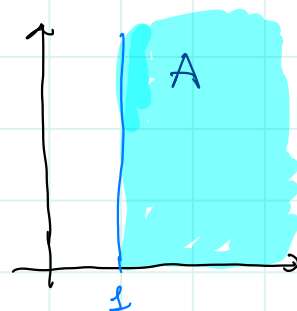
Non esiste



$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t,0) = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t^3,t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^3}{2t^4} = +\infty$$

Esempio 3 Determinare inf e sup di $\frac{xy}{x^2+y^4}$ nell'insieme
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 0\}$



È immediato che $\inf = \min = 0$. Infatti
 $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in A$ (addirittura
in tutto il 1° quadrante)

$f(2,0) = 0$ (in realtà in tutto l'asse x)

Possiamo dire che il max esiste per Weierstrass generalizzato.

Infatti

- $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} f(x,y) = 0$ (è vero anche senza limitarsi ad A)
- esiste $(x,y) \in A$ t.c. $f(x,y) > 0$ (ad esempio $(2,1)$)

Una volta che max esiste, lo cerchiamo tra i p.ti stat. o sul bordo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{y(x^2+y^4) - 2x \cdot xy}{(x^2+y^4)^2}, \frac{x(x^2+y^4) - 4y^3xy}{(x^2+y^4)^2} \right) = (0,0)$$

$$\frac{y^5 - x^2y}{()^2} = 0 \quad \frac{x^3 - 3xy^4}{()^2} = 0$$

$$\begin{cases} y(y^4 - x^2) = 0 \\ x(x^2 - 3y^4) = 0 \end{cases}$$

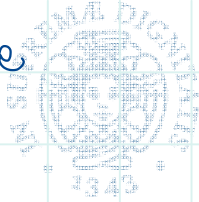
1^a equ

$y=0$ $\swarrow$ $x^2 = y^4$

$\downarrow$ 2^a equ $\swarrow$ $\searrow$

$x=0$ $x=0$ $y=0$

Morale: l'unico p.to stazionario è $(0,0)$ che non va bene per nessun motivo
 → non sta in A
 → è l'unico p.to in cui derivata = 0, quindi lì la funzione non ha senso!



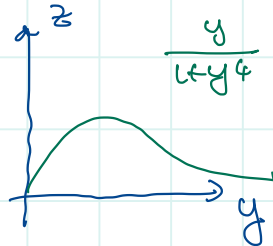
Non resta che cercare sul bordo, fatto da 2 pezzi

→ asse x , dove $f \equiv 0$ (questi sono i p.ti di min)

→ p.ti del tipo $(1,y)$ dove diventa $\frac{y}{1+y^4}$, e questa si studia per $y \geq 0$ facilmente:

Deriviamo:

$$\frac{1+y^4 - 4y^4}{(1+y^4)^2} = \frac{1-3y^4}{\dots} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$



Quindi il p.to di max è $(1, \frac{1}{\sqrt[4]{3}})$.

Esempio 4 Determinare per quali valori di $a > 0$ esiste il

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} \frac{x y^a}{x^2 + y^4}$$

1° fatto Il limite, se esiste, fa per forza 0. Infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = 0$$

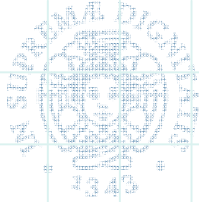
2° fatto Per $a \geq 3$ il limite non esiste perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,t) = \frac{t^{a+1}}{t^2+t^4} = \begin{cases} 1 & \text{se } a=3 \\ +\infty & \text{se } a>3 \end{cases}$$

3° fatto Per $a=1$ già sappiamo che esiste. Da questo si deduce che fa 0 anche per $a < 1$

Paragghiamo gli esponenti e vediamo che succede

$$x = u^2 \quad y = v$$



$\lim_{u^2+v^2 \rightarrow +\infty}$
 $u \geq 0, v \geq 0$

$$\frac{u^2 v^a}{u^4 + v^4}$$

e questo in coord. polari diventa

$$\frac{\rho^2 \cos^2 \theta \rho^a \sin^a \theta}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} = \frac{1}{\rho^{2-a}} \frac{\cos^2 \theta \sin^a \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

→ Per $a < 2$ con i soliti discorsi si vede che $\lim = 0$

→ Per $a \geq 2$ il limite non esiste, infatti

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t^2, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2 \cdot t^a}{2t^4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{t^{2-a}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & a=2 \\ +\infty & a>2 \end{cases}$$

Oss. Per $a < 2$ si può dimostrare l'esistenza anche "senza" paragghiare, una dividendo in zone

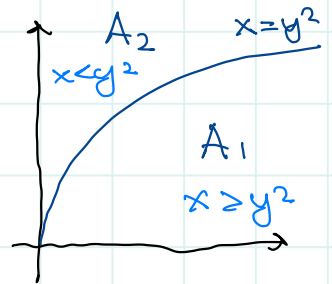
Facciamo per comodità $a=1$

In A_1 abbiamo che

$$0 \leq \frac{xy}{x^2+y^4} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x^2+y^4} \leq \frac{x\sqrt{x}}{x^2} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$\uparrow$
 $y \leq \sqrt{x}$
 in A_1

$\downarrow$
 0 perché $x \rightarrow +\infty$
 in A_1



$$0 \leq \frac{xy}{x^2+y^4} \leq \frac{y^3}{x^2+y^4} \leq \frac{y^3}{y^4} = \boxed{\frac{1}{y}}$$

$\uparrow$
 $x \leq y^2$
 in A_2

$\downarrow$
 0 perché $y \rightarrow +\infty$
 in A_2