



COORDINATE CILINDRICHE

Siamo in $\mathbb{R}^3$

Coord. cartesiane: (x, y, z)

Coord. cilindriche: ρ, θ, z
 ↗ piani corrisp. a x, y nel piano
 ↖ quota

Formule di passaggio

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z$$

Se conosco le cilindriche, in questo modo ottengo le cartesiane

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

La formula per θ dipende dal quadrante, come per le polari

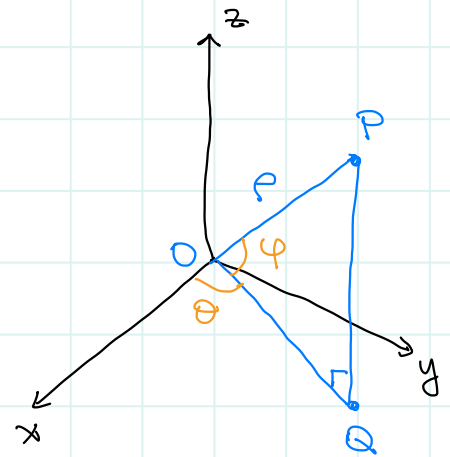
COORDINATE SFERICHE

Ce ne sono diverse versioni. Qui presento la versione dei geografi

Dato P nello spazio, sia Q la sua proiezione sul piano xy .

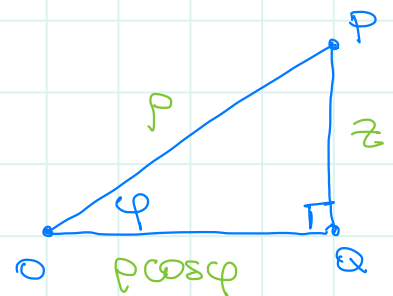
Detta O l'origine, indichiamo

- con ρ la lunghezza di OP
- con θ l'angolo tra OQ ed il semiasse positivo delle x (il θ di Q nelle polari)
- con φ l'angolo tra OQ e OP .



Dove variano?

$$\begin{aligned} \rho &\geq 0 && \text{(pensato come raggio)} \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} && \text{(latitudine)} \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi && \text{(longitudine)} \end{aligned}$$



Casi speciali : • L'origine è l'unico p.to con $\rho=0$ (il suo θ e il suo φ non sono definiti)

- per i p.ti dell'asse z (meno l'origine) si ha che $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ e θ non ha senso.

Formule di passaggio

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Distanza di $P = (x, y, z)$ dall'origine

Se conosco le coord. sferiche ρ, θ, φ , come trovo le cartesiane?

$$x = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

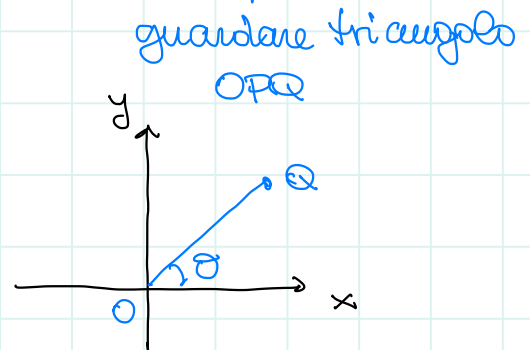
$$y = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \sin \varphi$$

$$x = OQ \cdot \cos \theta = \rho \cos \varphi \cos \theta$$

$$y = OQ \cdot \sin \theta = \rho \cos \varphi \sin \theta$$

(x e y si ricavano nel piano xy visto OQ e θ)

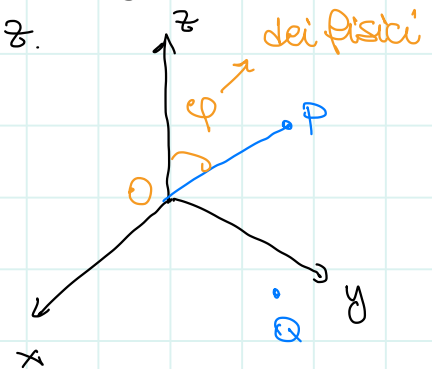


Achtung!

Le coord. sferiche dei fisici sono DIVERSE.
La differenza è φ , che per loro è l'angolo tra OP e il semiasse positivo delle z .

Cosa cambia

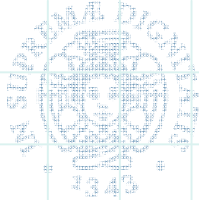
- φ dei fisici sta tra 0 e π
- $\varphi_{\text{fisici}} = 90^\circ - \varphi_{\text{geografi}}$
- nelle formule seni e coseni si scambiano



Ancora peggio : qualcuno scambia θ e φ , quindi sempre occhio alle convenzioni.

Esempio 1

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{\text{secondo grado}} - \underbrace{(x + 3z)}_{\text{primo grado}}$$



Passo in sferiche: la funzione diventa

$$\underbrace{\rho^2}_{x^2+y^2+z^2} - \rho \cos \varphi \cos \theta + 3 \rho \sin \varphi \geq \rho^2 - \rho - 3\rho = \boxed{\rho^2 - 4\rho}$$

$\downarrow$
 $+\infty$

Per confronto anche la funzione data tende a $+\infty$.

Esempio 2

$$\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} \frac{xyz}{x^4 + y^4 + z^4} \quad (3 \text{ variabili})$$

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{xy}{x^4+y^4} \quad (2 \text{ variabili})$$

In due variabili usiamo le polari (+ trucco valore assoluto)

$$0 \leq \frac{|\rho \cos \theta \cdot \rho \sin \theta|}{\rho^4 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} = \frac{|\cos \theta \cdot \sin \theta|}{\rho^2 (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta)} \leq \frac{1}{\rho^2 m_0}$$

$\nearrow 0$
per fare una fraz. + grande
sewe num. + grande e
denom. + piccolo
(essendo tutto positivo)

Per il solito discorso esiste m_0 t.c.

$$\cos^4 \theta + \sin^4 \theta \geq m_0 > 0$$

per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$

In 3 variabili usiamo le sferiche

$$0 \leq \frac{\cancel{\rho} \cos \varphi \cos \theta \cdot \cancel{\rho} \cos \varphi \sin \theta \cdot \cancel{\rho} \sin \varphi}{\rho^4 [\cos^4 \varphi \cos^4 \theta + \cos^4 \varphi \sin^4 \theta + \sin^4 \varphi]} \leq \frac{1}{\rho} \frac{1}{m_0}$$

$\downarrow$
 0

Per poter fare il passaggio, sewe sapere che

$$\exists m_0 > 0 \text{ t.c. } \text{Denom.} \geq m_0 \quad \forall \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Versione nuova del solito discorso. Chiamiamo $g(\theta, \varphi)$ la
 nda trigonometrica al denominatore. È una funzione continua
 di θ e φ . L'insieme $[0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è compatto (rettangolo
 bordo compreso), quindi $g(\theta, \varphi)$ ammette un minimo m_0 che
 è il valore in certo punto (θ_0, φ_0) . È evidente che $m_0 \geq 0$,
 essendo somma di quante potenze. Può essere $m_0 = 0$?

No! Dovrebbe essere $\sin^4 \varphi_0 = 0$, ma allora $\cos^4 \varphi_0 = 1$
 e restano $\cos^4 \theta_0 + \sin^4 \theta_0$ e questi non possono essere
 entrambi nulli. Quindi $m_0 = 0$ è impossibile, dunque
 $m_0 > 0$.

Esempio 3 $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow +\infty} \underbrace{x^2 + 2y^2 + 3z^2}_{2^\circ \text{ grado}} + \underbrace{xyz}_{3^\circ \text{ grado}}$ NON ESISTE

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 6t^2 + t^3 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, t, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} 6t^2 + t^3 = -\infty.$$

Oss: importa dove va il minimo, cioè che $x^2 + y^2 + z^2$ tenda a $+\infty$
 — 0 — 0 —