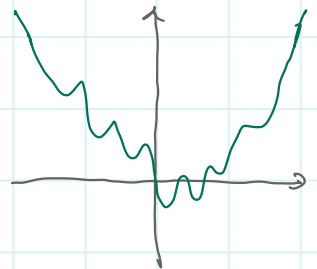


ANALISI 2 — LEZIONE 15

Teorema di Weierstrass generalizzato

Analisi 1 Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R} \}$.

Analisi 2 Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supponiamo che

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

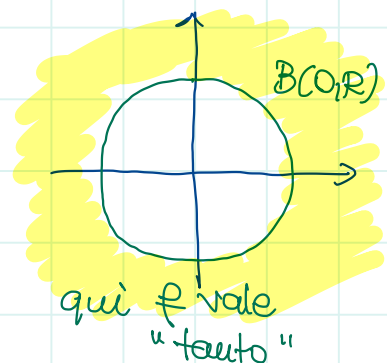
Allora esiste per forza $\min \{ f(x) : x \in \mathbb{R}^n \}$

posso mettere qualunque cosa ≥ 0

Dim. Applichiamo la def. di limite con $M = f(o) + 1$
 $\uparrow$
 origine di $\mathbb{R}^n$

Troviamo $R > 0$ tale che

$$\forall x \text{ con } \|x\| \geq R \text{ vale } f(x) \geq f(o) + 1$$

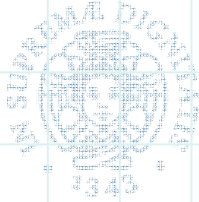


Ora consideriamo l'insieme $\|x\| \leq R$. Questo è un compatto, quindi esiste per W classico

$$m = \min \{ f(x) : \|x\| \leq R \}.$$

Dico che in realtà m è il minimo su tutto $\mathbb{R}^n$, cioè

$$f(x) \geq m \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (\text{e non solo nella palla})$$



Infatti ci sono due casi

- se $\|x\| \leq R$, allora $f(x) \geq m$ per definizione di m

- se $\|x\| > R$, allora

$$f(x) \geq f(x_0) + 1 \geq f(x_0) \geq m$$

per defniz.
di R

perché $0 \in$ palla, e quindi
contribuisce alla defniz. di m

e quindi ancora una volta $f(x) \geq m$.

Ci sono diverse varianti sostanzialmente analoghe

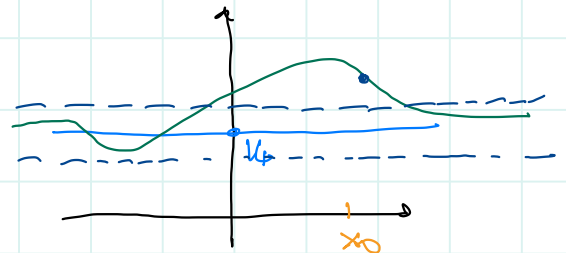
- se f è continua e $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, allora esiste il max

- se $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, A è chiuso e $\lim_{\substack{\|x\| \rightarrow +\infty \\ x \in A}} f(x) = +\infty$
allora esiste il minimo su A

- se $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l_0$, ed esiste

un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $f(x_0) > l_0$, allora esiste il max

(basta applicare la defniz. di limite
con $\varepsilon = \frac{f(x_0) - l_0}{2}$)



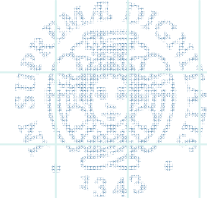
Esempio 1 Determinare inf e sup di
 $x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$

su tutto $\mathbb{R}^2$, determinando anche se si tratta di max/min.

Si vede subito che $\sup = +\infty$. Basta trovare un vettore in cui
 f tenda a $+\infty$. Ad esempio $\uparrow$ (e quindi max non esiste)

$f(t, 0) = t^2 - 6t$ che tende a $+\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$
 $\uparrow$ tesse x in direzione positiva

Per il minimo, dimostriamo che $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = +\infty$



In coordinate polari

$$\begin{aligned} \text{uso } 6\rho \cos\theta &\geq -6\rho \\ 8\rho \sin\theta &\geq -8\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2\theta + 2\rho^2 \sin^2\theta - 6\rho \cos\theta + 8\rho \sin\theta &\geq \rho^2 (\cos^2\theta + 2\sin^2\theta) - 6\rho - 8\rho \\ &\geq \rho^2 - 14\rho \end{aligned}$$

quindi da tesi segue per confronto.

W. generalizzato $\Rightarrow$ il minimo esiste $\Rightarrow$ i p.ti di minimo vanno ricercati tra i p.ti stazionari

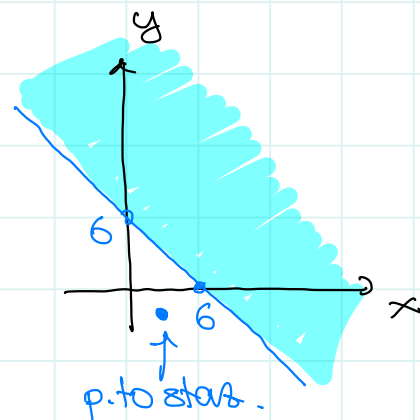
$$\nabla f(x,y) = (2x-6, 4y+8) = (0,0) \Leftrightarrow x=3, y=-2$$

Quindi $(3,-2)$, essendo l'unico p.to stat., è il punto di MIN

$$f(3,-2) = 9 + 8 - 18 - 16 = -17$$

Conclusione: $\sup = +\infty$, max non esiste
 $\inf = \min = -17$

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \geq 6\}$



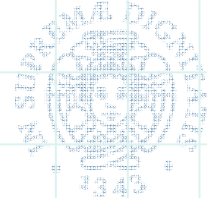
Ancora una volta $\sup = +\infty$ potendo usare

$f(0,t)$ con $t \rightarrow +\infty$ (andava bene anche $f(t,0)$ con $t \rightarrow +\infty$)

Ancora una volta W. generalizzato $\Rightarrow$ min esiste (il limite a $+\infty$ in A esiste perché esiste in $\mathbb{R}^2$ che è + grande).

I p.ti di minimo saranno p.ti stat. (ma in A non ne esistono), oppure sul bordo, cioè sulla retta $x+y=6$.

Come trovo i candidati: con i moltiplicatori di Lagrange, oppure parametrizzando.



In questo caso $y = 6 - x$ e quindi

$$f(x, 6-x) = x^2 + 2(6-x)^2 - 6x + 8(6-x)$$

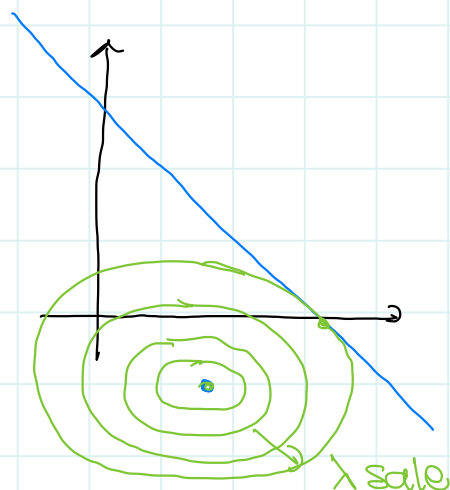
= espando... viene una parabola che avrà un minimo, che è il valore richiesto

Oss. geometrica Si poteva fare con le linee di livello

$$x^2 + 2y^2 - 6x + 8y = \lambda, \quad x^2 - 6x + 9 + 2(y^2 + 4y + 4) = \lambda + 9 + 8$$

$$(x-3)^2 + 2(y+2)^2 = \lambda + 17$$

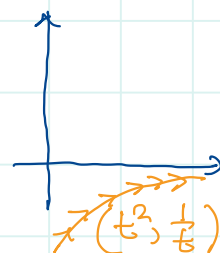
queste sono ellissi con centro in $(3, -2)$, che quando caso è il punto stazionario



La prima ellisse tangente determina il p.to di min.

Esempio (mt) Determinare inf e sup in $\mathbb{R}^2$ di

$$f(x, y) = y^2 + \arctan(xy)$$



Si vede subito che $\sup = +\infty$ ($\lim_{t \rightarrow -\infty} f(0, t) = +\infty$)
↑ anche $+\infty$ era ok

Per l'inf. osserviamo che

$$f(x, y) \geq -\frac{\pi}{2}$$

↑ anche stretta

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

questo dice che
 $\inf \geq -\frac{\pi}{2}$

Basta trovare un cammino che va a $-\frac{\pi}{2}$ (sewe $y \sim 0$ e $xy \sim -\infty$)

Prendiamo

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(t^2, \frac{1}{t}\right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t^2} + \arctan(t) = -\frac{\pi}{2}$$