

Solito esempio 1

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^8 + y^4 - 7x^4y^2$$

Passiamo in coord. polari

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^8 \cos^8 \theta + \rho^4 \sin^4 \theta - 7\rho^6 \cos^4 \theta \sin^2 \theta$$

Brutal mode: $\sim \rho^8 + \rho^4 - 7\rho^6 \rightarrow +\infty$ perché vince ρ^8 [MA] il coeff. di ρ^8 può essere nullo[MA] se il coeff. di ρ^8 è 0, allora anche quello di ρ^6 è 0, quindi resta solo ρ^4 che comunque tende a $+\infty$.

Detto meglio:

 $\rightarrow$ se $\cos \theta \neq 0$, allora il limite è $+\infty$ perché c'è ρ^8 $\rightarrow$ se $\cos \theta = 0$, allora $\sin \theta = \pm 1$, quindi resta ρ^4 , che tende comunque a $+\infty$.In ogni caso il limite è $+\infty$.**QUELLO CHE HO DETTO È SPAZZATURA**Sostanzialmente ho fatto il limite sulle rette pensando θ fisso. Invece avrei dovuto liberarmi di θ facendo la disuguaglianza !!!

In realtà il limite non esiste

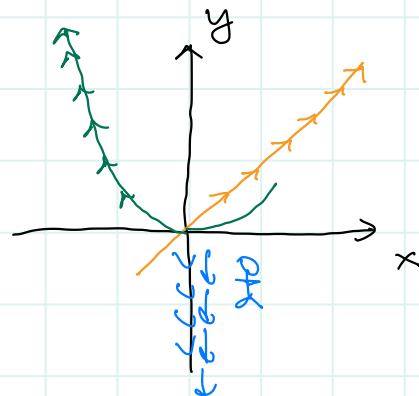
$$x^8 + y^4 - 7x^4y^2$$

$$\textcircled{1} \lim_{t \rightarrow -\infty} f(0, t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^4 = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0, -t) = \quad = \quad = +\infty$$

$$\textcircled{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^8 + t^4 - 7t^6 = +\infty$$

$$\textcircled{3} \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^8 + t^8 - 7t^8 = -\infty$$



LIMITI SU DOMINI RISTRETTI

Quando la funzione usa la
pensiamo definita su tutto $\mathbb{R}^2$

Esempio 2

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x+y$$

↑
qui penso su tutto $\mathbb{R}^2$

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} x+y$$

↑ qui la funzione è pensata
solo sul 1° quadrante

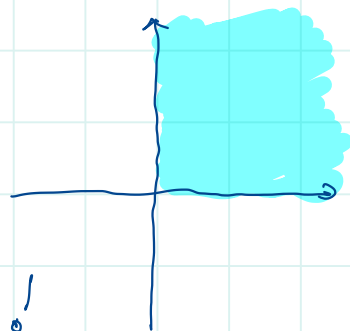
Il primo limite non esiste. Ad esempio

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(0,t) = -\infty$$

Se la funz. è definita solo sul 1° quadrante
non possiamo usare $(0,t)$ con $t \rightarrow -\infty$

In effetti il secondo limite esiste e fa $+\infty$!
Lo dimostreremo in coord. polari



$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho(\cos \theta + \sin \theta) \geq \boxed{m_0 \rho}$$

↓
 $+\infty$

Solito discorso : $\varphi(\theta) = \cos \theta + \sin \theta$ ha minimo per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

e tale minimo è un certo $m_0 > 0$ (per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$\sin \theta$ e $\cos \theta$ sono ≥ 0 ma non entrambi 0
contemporaneamente).

↑
siamo nel
1° quadrante

Ora si conclude come sempre.

Oss. Per $\theta \in [0, 2\pi]$ è ancora vero che $\cos \theta + \sin \theta \geq m_0$, ma
ora uno è negativo e dalla stima non segue nulla di buono.

Oss. Nel 2° e 4° quadrante il limite non esiste (ovvini!)
nel 3° quadrante è $-\infty$.

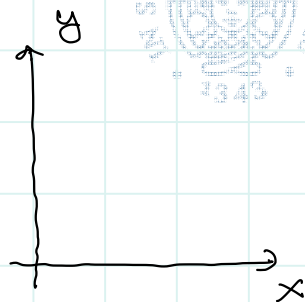
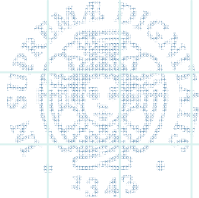
Esempio 3

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 0, y \geq 0}} xy$$

xy

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x \geq 1, y \geq 1}} xy$$

xy



Il 1° non esiste perché

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, t) = +\infty$$

Varianti 1°-bis : $\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ x > 0, y > 0}} xy$

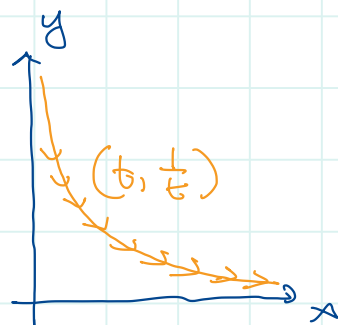
l'ovino $(t, 0)$ NON FUNZIONA PIÙ

Lo possiamo sostituire con

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, 1) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty \quad (\odot)$$

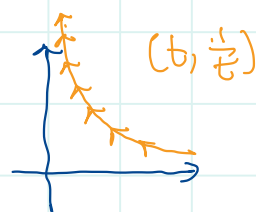
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t^2}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0 \quad (\odot)$$

oppure $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t, \frac{1}{t}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad (\odot)$



Quello che deve tendere a $+\infty$ è $x^2+y^2 = t^2 + \frac{1}{t^2}$.

Andava bene anche $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, \frac{1}{t}) = 1$



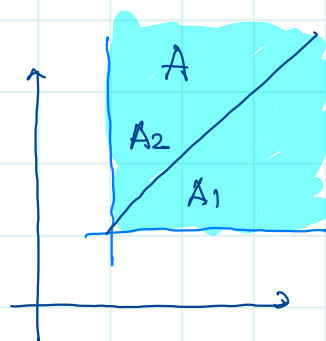
Il secondo limite, imponendo $x \geq 1$ e $y \geq 1$,

esclude anche questi nuovi ovini

Ora il limite esiste e fa $+\infty$!!!

dimostrare A questa zona. Dico che

$$xy \geq \frac{1}{2}(x+y) \quad \forall (x, y) \in A$$



Se questo è vero, allora per confronto



$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} xy \geq \frac{1}{2} \lim_{\substack{x^2+y^2 \rightarrow +\infty \\ (x,y) \in A}} x+y = +\infty$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{\sum \\ +\infty}}$

lo faceva pure su tutto il 1° quadrante, quindi a maggior ragione lo fa su A che è + piccolo

Come si dimostra la disuguaglianza?

$$xy = \underbrace{\frac{1}{2}xy}_{\substack{\uparrow \\ \text{uso che} \\ x \geq 1}} + \underbrace{\frac{1}{2}xy}_{\substack{\uparrow \\ \text{uso che} \\ y \geq 1}} \geq \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$$

Procedimento alternativo. Pongo $x = u+1$, $y = v+1$.
In questo modo ci siamo ridotti a fare il limite

$$\lim_{\substack{u^2+v^2 \rightarrow +\infty \\ u \geq 0, v \geq 0}} (u+1)(v+1) = \lim_{\dots} [uv + u + v + 1]$$

rimuovo
a roba ≥ 0

$$\geq \lim_{\substack{u^2+v^2 \rightarrow +\infty \\ u \geq 0, v \geq 0}} (u+v)$$

$$(u+v) = +\infty$$

$\uparrow$
 siamo su tutto il 1° quadrante come in esempio precedente

— 0 — 0 —