



Limiti all'infinito in più variabili

Analisi 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

Analisi 2

Andremo a definire $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y)$

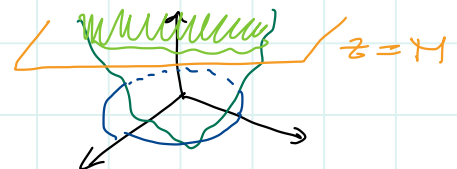
o più in generale

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x)$$

↑ Norma

Come al solito abbiamo 4 possibilità : $l \in \mathbb{R}$, $+\infty$, $-\infty$, N.E.

• Diciamo che $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ se



$$\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \geq M \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

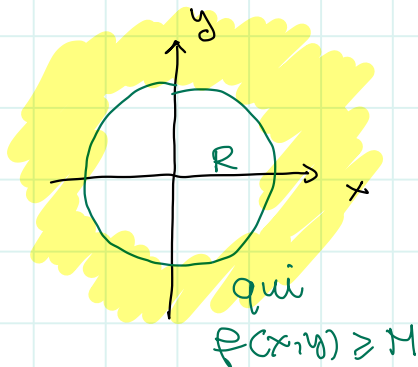
↑ anche enorme

È il solito "gioco" : noi fissiamo M e la funzione

trova $B(0, R)$ tale che fuori

da $B(0, R)$ si ha $f(x) \geq M$

Se noi fissiamo M più grande, la funzione ce la fa comunque, magari con un R più grande.



• Diciamo che $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ se

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists R > 0 \text{ t.c. } f(x) \leq M \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

↑ anche negativo enorme

- Diciamo che $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists R > 0 \text{ t.c. } |f(x) - l| \leq \varepsilon \quad \forall x \text{ con } \|x\| \geq R$$

↑ anche molto vicino a 0

- Il limite non esiste (e la cosa capita spesso) se non ricapita uno di nessuno dei casi precedenti.

Operativamente

- per dimostrare che un limite NON ESISTE basta trovare due punti che vanno all'infinito sui quali la funzione si comporta in modo diverso
- per dimostrare che esiste non bastano gli punti, e bisogna usare opportuni strumenti

Esempio 1 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^2 + y^2 - 6x$

L'idea è che tenda a $+\infty$. Passiamo in coord. polari

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \rho^2 - 6\rho \cos \theta \geq \rho^2 - 6\rho$$

Ora dire che $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$ è equivalente a dire che $\rho \rightarrow +\infty$, quindi dobbiamo calcolare

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} (\rho^2 - 6\rho) = +\infty \quad (\text{analisi 1})$$

Per confronto la nostra funzione, che è più grande, tende a $+\infty$.

Fatto generale 1

Se $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq g(\rho)$ e

$g(\rho) \rightarrow +\infty$ per $\rho \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = +\infty$$

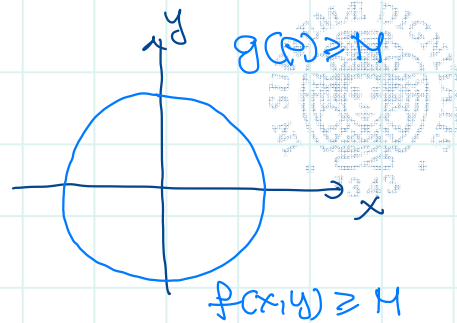
↑ a dx dipende solo da ρ

Per convincersene, basta pensare alla dim.

Dato $M \in \mathbb{R}$, esiste ρ_0 t.c. $g(\rho) \geq M$

quando $\rho \geq \rho_0$, ma allora $f(x,y) \geq M$

quando $x^2 + y^2 \geq \rho_0^2$



Esempio 2 $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} \frac{y}{x^2+y^2+1}$

L'idea è che tenda a 0.

Proviamo con trucco del valore assoluto + coordinate polari

$$\boxed{0} \leq \underbrace{|f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)|}_{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ per i carabinieri}}} = \frac{\rho |\sin \theta|}{\rho^2 + 1} \leq \boxed{\frac{\rho}{\rho^2 + 1}} \quad \begin{matrix} \downarrow \\ 0 \end{matrix} \text{ quando } \rho \rightarrow +\infty$$

Fatto generale 2' Se vale una disug. del tipo

$$g_1(\rho) \leq f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g_2(\rho)$$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_1(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +\infty} g_2(\rho) = l \quad (\text{stesso } l \text{ a dx e sx})$$

è importante che
i due laterali
NON dipendano
da θ

allora $\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = l$

Fatto generale 3' Se vale $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \leq g(\rho)$

e

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} g(\rho) = -\infty,$$

allora anche

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} f(x,y) = -\infty.$$

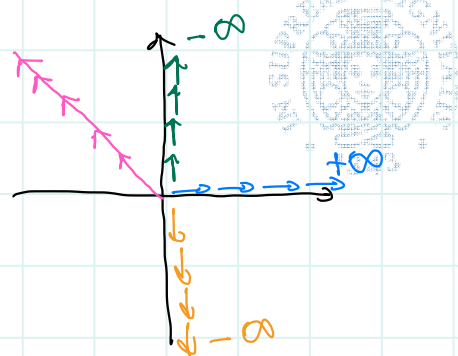
Esempio 3

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty}$$

$$x^2 - 3y^2$$

↑
spinge a $+\infty$

↑
spinge a $-\infty$



In questo caso il limite NON ESISTE

$$\textcircled{1} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -3t^2 = -\infty$$

$$\textcircled{2} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 = +\infty$$

Potremo usare anche altri percorsi, ad esempio

$$\textcircled{3} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} -3t^2 = -\infty$$

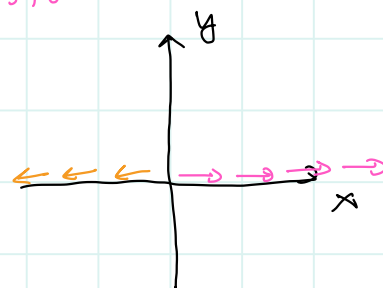
$$\textcircled{4} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(-t,t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 - 3t^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} -2t^2 = -\infty$$

Esempio 4

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x + 2y^2$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty$$



Esempio 5

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow +\infty} x^4 + 2y^4 - 7x^2y - \arctan(xy)$$

L'idea è che tendiamo a $+\infty$. Proviamo a passare in coord. polari cercando una stima dal basso con una $g(\rho) \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= \rho^4 (\cos^4 \theta + 2 \sin^4 \theta) - 7 \rho^3 \cos^2 \theta \sin \theta - \arctan(\rho^2 \cos \theta \sin \theta) \\ &\geq \underbrace{\rho^4 (\cos^4 \theta + 2 \sin^4 \theta)}_{\text{devo liberarmi di questo}} - 7 \rho^3 - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

SOLITO DISCORSO

la funzione $\varphi(\theta) = \cos^4 \theta + 2 \sin^4 \theta$ è continua, dunque per W. di analisi φ ammette un minimo per $\theta \in [0, 2\pi]$. Tale minimo è il valore assunto in un certo $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, dunque è strettamente > 0 perché $\cos^4 \theta_0$ e $\sin^4 \theta_0$ non possono essere entrambi nulli.

In conclusione

$$\exists m_0 > 0 \text{ t.c. } \cos^4 \theta + 2 \sin^4 \theta \geq m_0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

Abbiamo così dimostrato che

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \geq m_0 \rho^4 - 7\rho^3 - \frac{\pi}{2}$$

Essendo $m_0 > 0$, sappiamo che questa funzione DELLA SOLA ρ tende a $+\infty$ quando $\rho \rightarrow +\infty$ (per analisi φ)

Quindi per il fatto generale φ anche il limite iniziale fa $+\infty$.

— 0 — 0 —