

Back to esercizio precedente :

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$$

$$\phi(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2 = 0 \rightarrow x^2 = 2 - z^2$$

$$\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0 \rightarrow y^2 = z - x^2$$

$$f(x, y, z) = 2 - z^2 + 2(z - x^2) - z$$

$$= 2 - z^2 + 2z - 2x^2 - z = 2 - z^2 + 2z - 2(2 - z^2) - z$$

$$= z^2 + z - 2$$

Quindi posso fare max/min di $z^2 + z - 2$, ma con quali vincoli?

$$x^2 + z^2 = 2 \rightsquigarrow z^2 = 2 - x^2 \rightsquigarrow z^2 \leq 2 \rightsquigarrow z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

$$x^2 + y^2 - z = 0 \rightsquigarrow 2 - z^2 + y^2 - z = 0 \rightsquigarrow y^2 = \underbrace{z^2 + z - 2} \geq 0$$

radici -2 e 1

$z \leq -2$ oppure $z \geq 1$

Quindi restringendo resta $z \in [1, \sqrt{2}]$ su cui dobbiamo

studiare $z^2 + z - 2$

minimo per $z=1 \rightsquigarrow$ trovo x

massimo per $z=\sqrt{2} \rightsquigarrow$ e y .

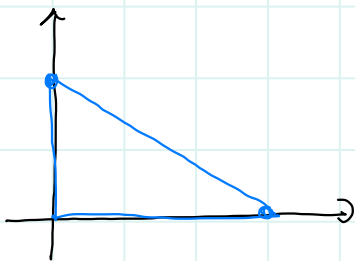


Max/min con valori assoluti

$$f(x, y) = |x + y - 1|$$

$A =$ triangolo con vertici

$$(0, 0), (3, 0), (0, 2)$$



Problema con il valore assoluto: c'è il rischio di avere p.ti singolari dove si annulla.

Procedura consigliata:

→ studio il pbm. SENZA val. assol.

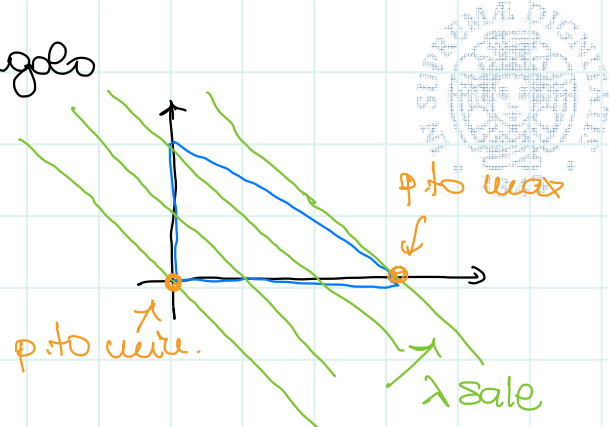
→ tratto le conclusioni pensando che le zone del grafico con $z < 0$ si ribaltano.

Facciamo max/min di $x+y-1$ sul triangolo

$$x+y-1=\lambda \leadsto y=1+\lambda-x$$

P.to di max: $(3,0)$ $\text{Max} = 2$

P.to di min: $(0,0)$ $\text{min} = -1$



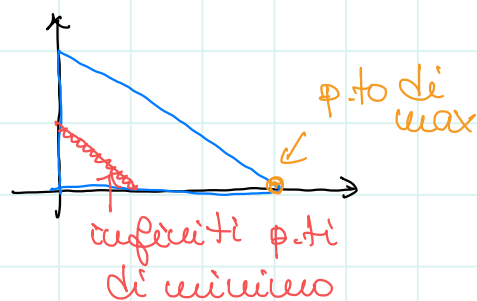
Quando ribalto le parti negative, il -1 diventa 1 , che quindi perde dal 2 .

Più in generale: se $f(x,y)$ ha max positivo A e min negativo $-B$

allora per il Max di $|f(x,y)|$ se la giochiamo A e B .

Essendo un valore assoluto, il minimo è dove vale 0 , se esistono p.ti nell'insieme in cui f si annulla.

Nel nostro caso tutti i p.ti con $x+y=1$ sono p.ti di min



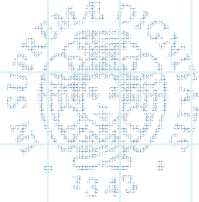
Esempio 2 $f(x,y) = |x+y-2|$
solito triangolo.

Senza valore assoluto: $\text{Max} = 1$ con p.to max $(3,0)$
 $\text{min} = -2$ con p.to min $(0,0)$

Con il valore assoluto: per il max se la giochiamo 1 e 2
vecchio min ribaltato

Quindi ora $\text{max} = 2$ con p.to di max $(0,0)$
 $\text{min} = 0$ con ∞ p.ti di min.

Esempio 3 Solito triangolo con $f(x,y) = |x+y-7|$



Senza val. assol.: $\max = -4$ con p.to $\max = (3,0)$
 $\min = -7$ " " $\min = (0,0)$

Con il valore assoluto: $\min = 4$ con p.to $\min = (3,0)$
 $\max = 7$ con p.to di $\max = (0,0)$

Achtung! Il fatto che ci sia un valore assoluto non dice che per forza il minimo è 0!!!!

Esempio 4 $f(x,y) = x^2 + y^2$
 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + y^4 = 1\}$

Domanda: come è fatto l'insieme A?

È una specie di circ. deformata

Non è difficile veder che

$$\sqrt[4]{1-x^4} \stackrel{?}{\geq} \sqrt{1-x^2}$$

circonfereza

$$1-x^4 \stackrel{?}{\geq} (1-x^2)^2 = 1+x^4-2x^2 \Leftrightarrow 2x^4-2x^2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2(x^2-1) \leq 0$$

$0 \leq x \in [-1,1] \quad \circ$

L'insieme è compatto ed è "solo bordo", quindi basta fare i moltiplicatori con $f(x,y) = x^2 + y^2$ e $\phi(x,y) = x^4 + y^4 - 1$

1° sistema

$$\phi_x = 0$$

$$4x^3 = 0$$

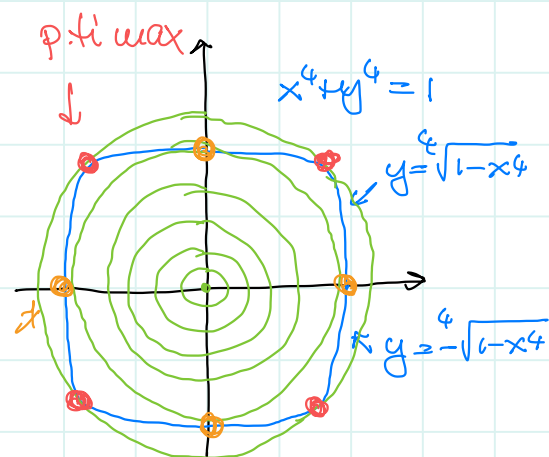
$$\phi_y = 0$$

$$4y^3 = 0$$

$\leadsto$ impossibile

$$\phi = 0$$

$$x^4 + y^4 = 1$$



sistema

$$f_x = \lambda \phi_x$$

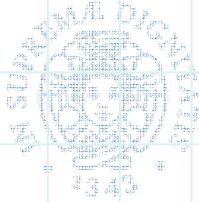
$$2x = 4\lambda x^3$$

$$f_y = \lambda \phi_y$$

$$2y = 4\lambda y^3$$

$$\phi = 0$$

$$x^4 + y^4 = 1$$



Cosa NON fare : semplificare x nella 1ª e y nella 2ª

Moltiplico la 1ª per y^3 , la seconda per x^3 e sottraggo

$$2xy^3 - 2yx^3 = 0 \quad \leadsto \quad xy(x^2 - y^2) = 0$$

Si aprono 3 possibilità

$$\bullet \quad x = 0 \quad \leadsto \quad y = \pm 1 \quad \leadsto \quad (0, \pm 1)$$

$$\bullet \quad y = 0 \quad \leadsto \quad x = \pm 1 \quad \leadsto \quad (\pm 1, 0)$$

$$\bullet \quad x^2 = y^2 \quad \leadsto \quad x^4 = y^4 \quad \leadsto \quad x^4 = y^4 = \frac{1}{2} \quad \leadsto \quad \left(\pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

4 punti, perché i segni
sono indipendenti

Sostituendo gli 8 p.ti abbiamo finito.