

Più moltiplicatori di Lagrange (due moltiplicatori in $\mathbb{R}^3$)

Si applica quando vogliamo fare max/min su un insieme del tipo

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\phi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0}_{\text{due equazioni}}\}$$

Brutalmente: V è l'intersezione di due superfici, quindi un oggetto 1-dimensionale

I candidati pti di max/min stanno in 2 categorie

Soluzioni del 1° sistema Cerchiamo i pti di V in cui

$\nabla\phi$ e $\nabla\psi$ sono linearmente dipendenti

cioè la matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_x & \phi_y & \phi_z \\ \psi_x & \psi_y & \psi_z \end{pmatrix} \text{ ha RANGO} \leq 1$$

cioè i 3 minori 2×2 si annullano. Il primo sistema è quindi

$$\phi_y \psi_z - \phi_z \psi_y = 0$$

$$\phi_x \psi_z - \phi_z \psi_x = 0$$

$$\phi_x \psi_y - \phi_y \psi_x = 0$$

$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$

Sistema di 5 equazioni in 3 incognite, quindi molto spesso non ha soluzioni

Soluzioni del 2° sistema

Cerco i punti di V in cui

$$\nabla f = \lambda \nabla \phi + \mu \nabla \psi$$

↑
MULTIPLICATORI

(cioè ∇f è comb. lineare di $\nabla\phi$ e $\nabla\psi$)

Il secondo sistema è quindi



$$f_x = \lambda \phi_x + \mu \psi_x$$

$$f_y = \lambda \phi_y + \mu \psi_y$$

$$f_z = \lambda \phi_z + \mu \psi_z$$

$$\phi = 0$$

$$\psi = 0$$

Sistema di 5 equ. in 5 incognite

(x, y, z, λ, μ)

quindi in genere ci aspettiamo soluzioni.

Esempio 1

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 - z = 0\}$$

L'insieme A è compatto? Chiuso lo è (perché ci sono gli =)

Resta da capire se è limitato.

[S1] Dall'eq. $x^2 + z^2 = 2$ otteniamo che $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ e $z \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

Ora dall'altra eq. $y^2 = z - x^2$ e quindi y^2 è limitato

e da questo otteniamo una limit. su y . Più precisamente

$$y^2 = z - x^2 \leq \sqrt{2} \quad \leadsto \quad y \in [-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}].$$

Ora sappiamo che max / min esistono per W .

Applicheremo ora la procedura: V non ha parte interna, perché è una specie di curva, quindi non ha senso cercare punti stazionari o singolari interni. Quindi V è "solo bordo".

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$$

$$\phi(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2$$

$$\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

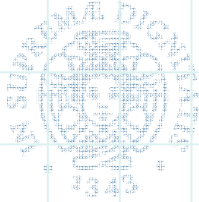
2° sistema

$$\begin{pmatrix} \nabla \phi \\ \nabla \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}$$

Per avere rango ≤ 1 serve che

$$xy = 0 \quad -2x - 4xz = 0$$

$$yz = 0$$



$$\begin{cases} xy = 0 \\ yz = 0 \\ x(1+2z) = 0 \\ x^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &xy = 0 \\ &\swarrow \quad \searrow \\ &x = 0 \quad y = 0 \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad 4^a \quad \downarrow \\ &\quad z = \pm\sqrt{2} \quad \downarrow 2^a \\ &\quad y = 0 \\ &\quad \downarrow \\ &5^a \text{ non funziona} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &xy = 0 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad y = 0 \\ &\quad \downarrow \\ &\quad x(1+2z) = 0 \\ &\quad \swarrow \quad \searrow \\ &\quad x = 0 \quad z = -\frac{1}{2} \\ &\quad \downarrow \quad \downarrow \\ &\quad \text{come prima} \quad \downarrow \\ &\quad x^2 = 2 - \frac{1}{4} \quad 4^a \\ &\quad x^2 = \frac{1}{2} \quad 5^a \\ &\quad \downarrow \\ &\text{Non funziona} \end{aligned}$$

2° sistema

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x + 2\mu x \\ 4y = 2\mu y \\ -1 = 2\lambda z - \mu \\ x^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

2° equ:

$$y(2-\mu) = 0$$

$$y = 0$$

5° equ

$$z = x^2$$

4° equ

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

$$(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0$$

↓

$$x = \pm 1$$

↓

$$(\pm 1, 0, 1)$$

$$\mu = 2$$

↓ 1° equ

$$x = \lambda x + 2x; \quad x(\lambda + 1) = 0$$

$$x = 0$$

4° equ

$$z = \pm\sqrt{2}$$

↓ 5° equ

$$y^2 = z = \pm\sqrt{2}$$

$$(0, \pm\sqrt[4]{2}, \sqrt{2})$$

$$y^2 = z - x^2 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$$

Nessuna soluzione

$$\lambda = -1$$

3° equ

$$-1 = -2z - 2$$

$$2z = -1$$

$$z = -\frac{1}{2}$$

4° equ

$$x^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{2}$$

↓ 5° equ

e troviamo y^2

Alla fine i candidati sono 4 e basta sostituirli nella funzione

$$f(\pm 1, 0, 1) = 1 - 1 = 0$$

← min.

$$f(0, \pm\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 0 + 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

← max

Idea alternativa

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$$

$$\phi(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2$$

$$\psi(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \leadsto y^2 = z - x^2$$

Nell'insieme A si ha $f(x, y, z) = x^2 - z + 2z - 2x^2 = z - x^2$

Quindi fare max/min di $f(x, y, z)$ è equivalente a fare max/min di $z - x^2$ o anche di y^2 .

In questi casi i conti sono più semplici in quanto alcune derivate si annullano.

Come è fatto l'insieme A?

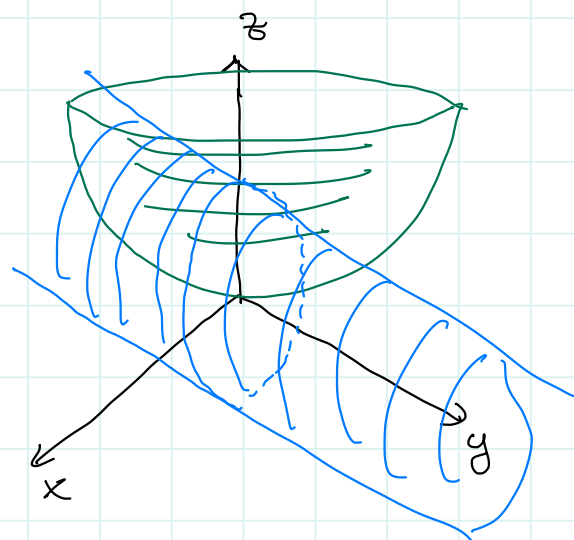
Cosa rappresenta

$$x^2 + z^2 = 2$$

$$z = x^2 + y^2$$

paraboloidi

CILINDRO
che ha come asse
l'asse y e come
"base" la circ.
 $x^2 + z^2 = 2$



A è l'intersezione tra paraboloidi e cilindro

