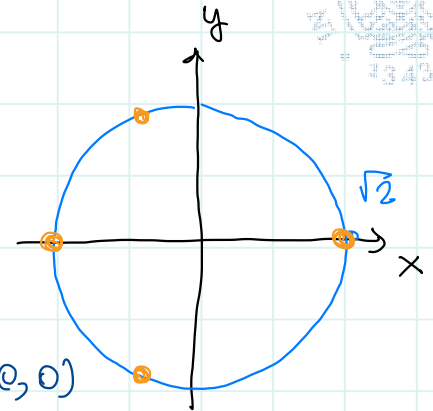


Esempio 1

$$f(x, y) = x - y^2$$

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$$



W.  $\Rightarrow$  max e min esistono

① Staz. interni :  $\emptyset$

$$\nabla f(x, y) = (1, -2y) \neq (0, 0)$$

② Sing. interni :  $\emptyset$

③ Bordo : moltiplicatori

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

1° sistema

$$g_x = 0$$

$$2x = 0$$

$$g_y = 0$$

$$2y = 0$$

$$g = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$\Rightarrow$  NESSUNA SOLUZ.

2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -2y = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

NON PENSARE NEHMENO  
DI SEMPLIFICARE  $y$

$$y(\lambda + 1) = 0 \quad 2^a \text{ equ.}$$

$$y = 0$$

$$\lambda = -1$$

$$\begin{cases} 3^a \text{ equ.} \\ x^2 = 2 \end{cases}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} 1^a \text{ equ.} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^a \text{ equ.} \\ y^2 = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$(\sqrt{2}, 0)$$

$$(-\sqrt{2}, 0)$$

$$(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{7}}{2})$$

$$(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{7}}{2})$$

Sostituisco nella funzione

$$f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$$

$$f(-\sqrt{2}, 0) = -\sqrt{2}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$$

Verifica con linee di livello

$$x - y^2 = \lambda \rightsquigarrow x = y^2 + \lambda$$

Si poteva risolvere parametrizzando il bordo?

Certamente sì. Una parametr. è

$$(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) \quad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

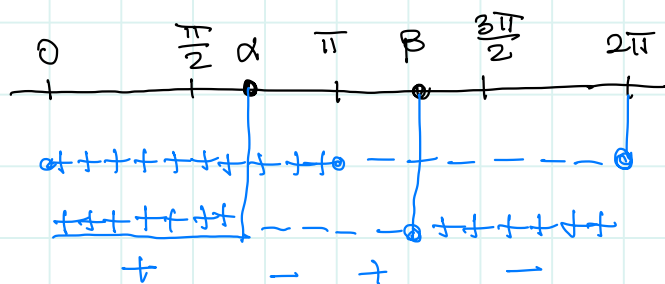
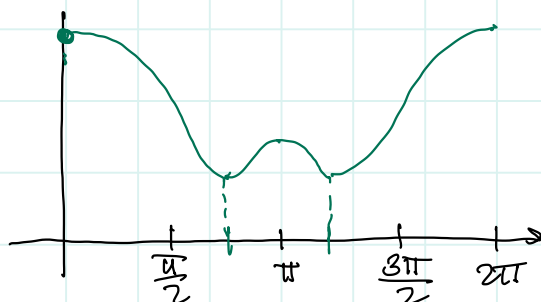
$\uparrow$                        $\uparrow$   
 raggio

$$\varphi(t) = f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = \sqrt{2} \cos t - 2 \sin^2 t$$

e questa la studio per  $0 \leq t \leq 2\pi$

$$\varphi'(t) = -\sqrt{2} \sin t - 4 \sin t \cos t = -\sin t (\sqrt{2} + 4 \cos t) = 0$$

$$\cos t = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

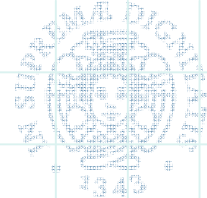


Si vede che il max si ottiene per  $t=0$  o  $t=2\pi$  e viene  $\sqrt{2}$

Il minimo si ottiene per  $t=\alpha$  e per  $t=\beta$ .

$$\text{Quanto vale? } \sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin^2 \alpha = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) - 2 \left(1 - \frac{1}{8}\right)$$

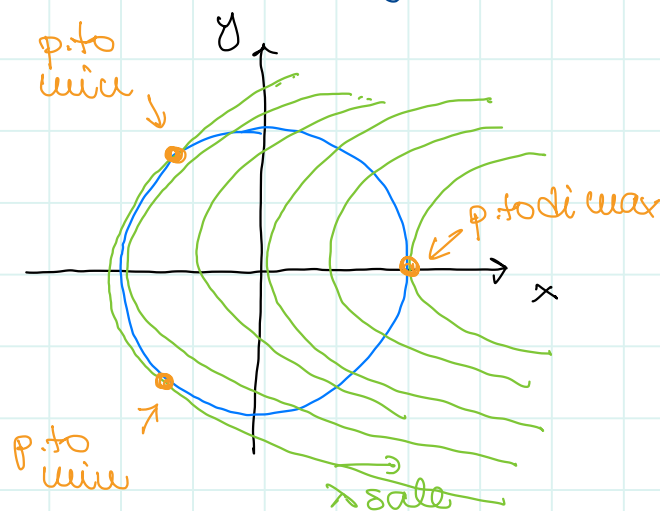
$$= -\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{7}{8} = -\frac{1}{2} - \frac{7}{4} = -\frac{9}{4}$$



Conclusione

Max =  $\sqrt{2}$  p.to max:  $(\sqrt{2}, 0)$

Min =  $-\frac{9}{4}$ , p.to di min:  $\left(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$



3° modo

$$f(x,y) = x - y^2$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$y^2 = 2 - x^2$$



Sostituzione del vincolo: sull'insieme  $V$  (cioè dove  $x^2 + y^2 = 2$ )

$$\text{vale che } x - y^2 = x + x^2 - 2$$

Quindi fare max/min di  $x - y^2$  equivale a fare max/min di  $x + x^2 - 2$  che dipende solo da  $x$ .

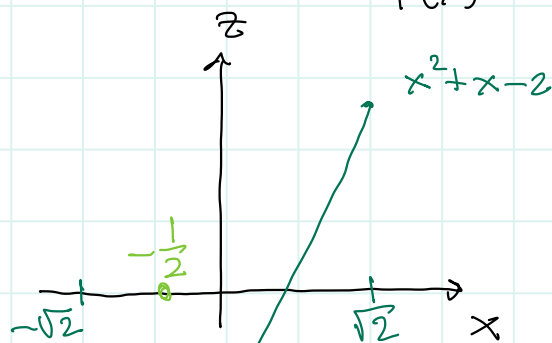
Ora su  $V$   $x$  varia in  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ , quindi studio  $\underbrace{x^2 + x - 2}_{\psi(x)}$  in quell'intervallo !!

$$\psi'(x) = 2x + 1 \quad \psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo

→ max per  $x = \sqrt{2}$  (quindi  $y = 0$ )

→ min per  $x = -\frac{1}{2}$  (quindi  $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$ )

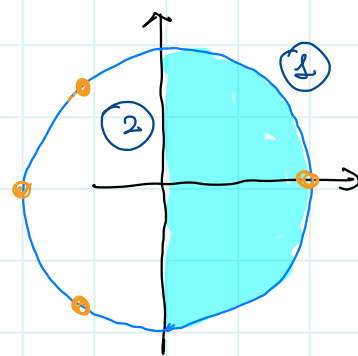


e si conclude allo stesso modo.

Esempio 2

$$f(x,y) = x - y^2$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0\}$$



Tutto come prima fino al bordo, che ora è fatto da 2 pezzi.

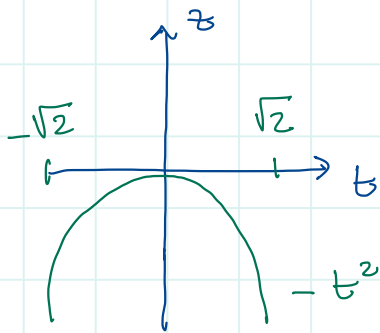
Trattiamo separatamente i 2 pezzi di bordo

① Moltiplicatori  $\rightsquigarrow$   $(\sqrt{2}, 0)$   ~~$(-\sqrt{2}, 0)$~~   ~~$(-\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{7}}{2})$~~

Non sono accettabili perché  
non hanno  $x \geq 0$

② Essendo un segmento lo parametrizzo  $(0, t)$  con  $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\varphi(t) = f(0, t) = -t^2$$



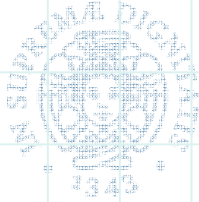
In questo tratto abbiamo

max per  $t=0$

$$\leadsto (0,0)$$

min per  $t=\pm\sqrt{2}$

$$\leadsto (0, \pm\sqrt{2})$$



Ancora una volta abbiamo 4 candidati

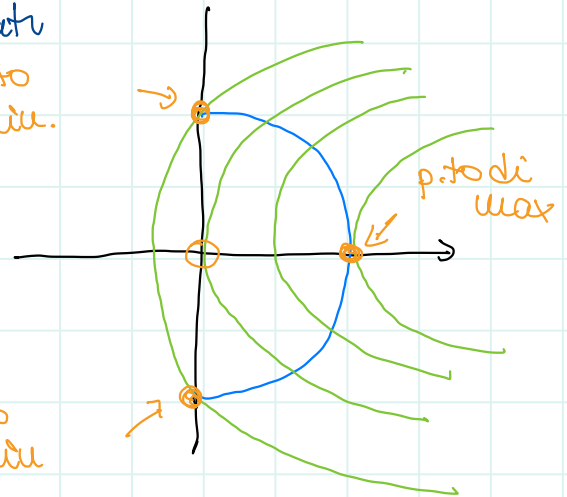
$$f(\sqrt{2}, 0) = \sqrt{2}$$

← max

$$f(0, 0) = 0$$

$$f(0, \pm\sqrt{2}) = -2 \leftarrow \text{min}$$

p.to  
di min.



Regola generale: quando il bordo è fatto da due pezzi,  
occorre includere fra i candidati  
gli estremi dei vari pezzi, che possiamo chiamare  
→ bordi dei bordi  
→ punti di taglio