



MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE (Caso di 1 moltiplicatore in $\mathbb{R}^2$)

Def. Sia $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice lugaro di zeri di g l'insieme

$$V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0 \}$$

Brutalmente: V sarà il bordo dell'insieme, o un pezzo del bordo, e $g(x, y) = 0$ sarà "l'equazione del bordo".

Obiettivo: trovare i candidati ad essere p.ti di max/min di una certa funzione $f(x, y)$ in V .

Teorema (Un moltiplicatore in $\mathbb{R}^2$) Siano $f(x, y)$ e $g(x, y)$ due funzioni differenziabili e con derivate parziali continue.

Sia V il luogo di zeri di g .

Allora i candidati col essere p.ti di max/min di f in V rientrano nelle seguenti due categorie,

① Soluzioni del sistema cioè p.ti (x, y) in cui

$$g(x, y) = 0 \quad \text{e} \quad \nabla g(x, y) = 0$$

Diventa un sistema di 3 equ. in 2 incognite

$$g_x(x, y) = 0$$

$$g_y(x, y) = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

[Brutalmente: spesso non ha soluzione perché ci sono + incognite che equazioni]

[Achtung! Non è un sistema lineare]

② Soluzioni del 2° sistema cioè i punti di V , quindi $g(x,y) = 0$, in cui ∇f e ∇g sono paralleli, cioè $\nabla f = \lambda \nabla g$
MOLTIPLICATORE

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$$

$$g(x,y) = 0$$

Sistema di 3 equ. in 3 incognite x, y, λ quindi in generale ci aspettiamo che ci siano soluzioni

Operativamente: $\rightarrow$ scrivo l'insieme come luogo di zeri

$\rightarrow$ Risolvo i due sistemi (c'è tanto precorso)

$\rightarrow$ I p.ti (x,y) trovati (gli eventuali λ di dimentico) sono i candidati cercati.

Esempio 1

$$f(x,y) = x - 3y$$

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Per W. max e min. esistono. Li cerco nelle 3 categorie

① Staz. int. $\nabla f(x,y) = (1, -3)$ non si annulla mai $\leadsto \emptyset$

② Sing. int. $\leadsto \emptyset$

③ Bordo I p.ti del bordo verificano $\frac{x^2 + y^2 - 4}{g(x,y)} = 0$

Applico metodo moltiplicatori, risolvendo i 2 sistemi

1° sistema

$$g_x = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

$$g_y = 0$$

$$2y = 0$$

$$y = 0$$

$$g = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$\left. \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \right\}$ incompatibili con la 3°

Quindi il 1° sistema NON HA SOLUZIONI

Oss. on the road : max e min esistono, quindi per forza devono venire fuori dal 2° sistema

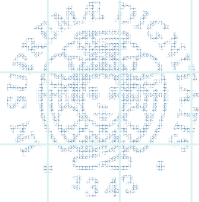
2° sistema

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ -3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$



Primo modo di risolvere:

→ ricavo x e y dalle prime 2 equazioni $x = \frac{1}{2\lambda}$ $y = -\frac{3}{2\lambda}$
(potrei dividere per λ essendo questo $\neq 0$, altrimenti da prime due equ. non vanno bene)

→ sostituisco nella 3^a e trovo

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = 4 \quad \leadsto \quad 10 = 16\lambda^2 \quad \leadsto \quad \lambda^2 = \frac{10}{16} \quad \leadsto \quad \lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Quindi abbiamo trovato due soluzioni

$$(x, y) = \left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}} \right)$$

$$(x, y) = \left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}} \right)$$

che saranno i p.ti di max/min.

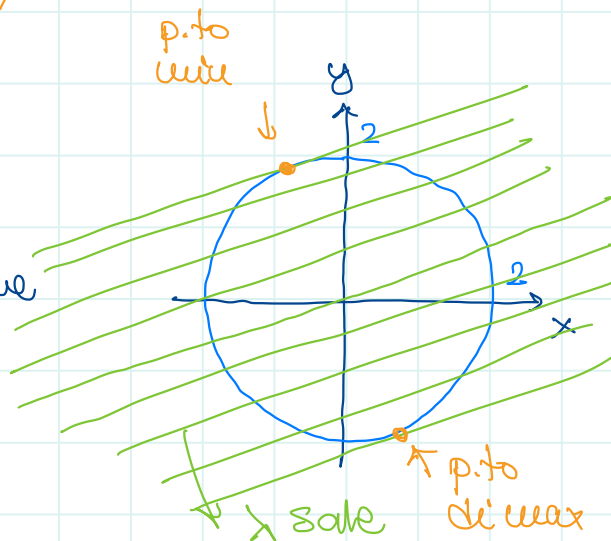
Basta sostituire nella funzione

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}}\right) = \frac{20}{\sqrt{10}} = 2\sqrt{10} \quad \leftarrow \text{MAX}$$

$$f\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{6}{\sqrt{10}}\right) = -2\sqrt{10} \quad \leftarrow \text{MIN}$$

Controlliamo con le linee di livello che il risultato sia ragionevole

$$\begin{aligned} x - 3y &= \lambda \quad \leadsto \quad 3y = x - \lambda \\ &\leadsto \quad y = \frac{x}{3} - \frac{\lambda}{3} \end{aligned}$$



Secondo modo di risolvere il sistema

$$1 = 2\lambda x$$

$$-3 = 2\lambda y$$

$$x^2 + y^2 = 4$$

→ Moltiplico la 1ª equ. per y e la seconda per x

$$\begin{aligned} y &= 2 \lambda xy \\ -3x &= 2 \lambda xy \end{aligned}$$

Sottraendo trovo $y = -3x$, che sostituisco nella 3ª equ.

$$\begin{aligned} x^2 + 9x^2 &= 4 \rightsquigarrow 10x^2 = 4 \rightsquigarrow x^2 = \frac{4}{10} \rightsquigarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{10}} \\ &\rightsquigarrow y = \mp \frac{6}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

sede + sopra,
c'è - sotto.

— o — o —

Di solito la difficoltà è risolvere il sistema

— o — o —

Almeno geometricamente, perché funziona il metodo.

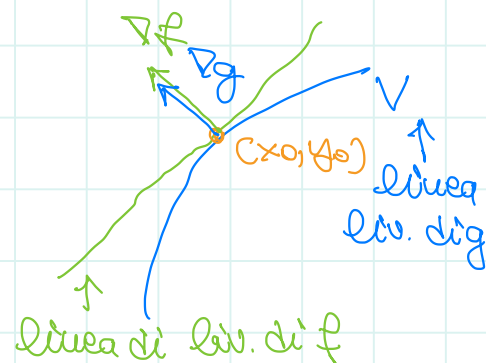
Torniamo all'esempio precedente.

Pensando alle linee di livello, stiamo cercando

i p.t. in cui l'insieme V è TANGENTE alle linee di livello di f . la seconda oss. è che V è una linea di livello di g . Quindi nei p.t. di max/min abbiamo una linea di livello di g che è tangente ad una linea di livello di f .

Ora le linee di livello di f sono $\perp$ a ∇f

" " " g " " ∇g



Quindi in (x_0, y_0) i gradienti di f e di g sono allineati, in quanto $\perp$ alla stessa cosa.

Quindi ∇f e ∇g sono uno multiplo dell'altro, quindi abbiamo una soluz. del 2º sistema

"stare in V " " ∇ uno multiplo dell'altro "

Essere multipli ha poco senso se uno è nullo, e i casi in cui accade sono nel 1º sistema.