



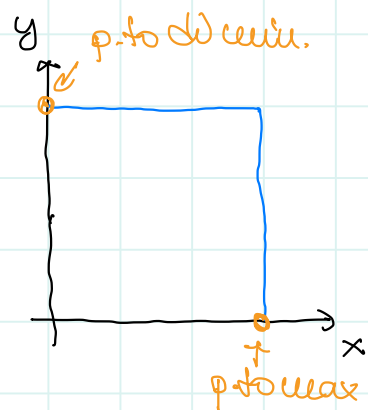
## Come trovare max/min di funzioni su insiemi compatti

- ① Disuguaglianze elementari
  - ② Linee di livello
  - ③ Seguire la procedura standard con i p.ti delle 3 categorie.
- Per il bordo ci sono due tecniche
- 3.1 Parametrizzazione del vincolo
  - 3.2 Moltiplicatori di LAGRANGE

Esempio 1  $A = [0,1] \times [0,1]$   $f(x,y) = x - 2y$

Per W max e min esistono

- ①  $x - 2y \leq 1 - 0 = 1$  MAX  
 ↑  
 prendo  $x$  più grande possibile  
 $y$  più piccolo possibile



e vale il segno di  $=$  se e solo se  $x=1$  e  $y=0$ .

Quindi  $(1,0)$  è il p.to di max

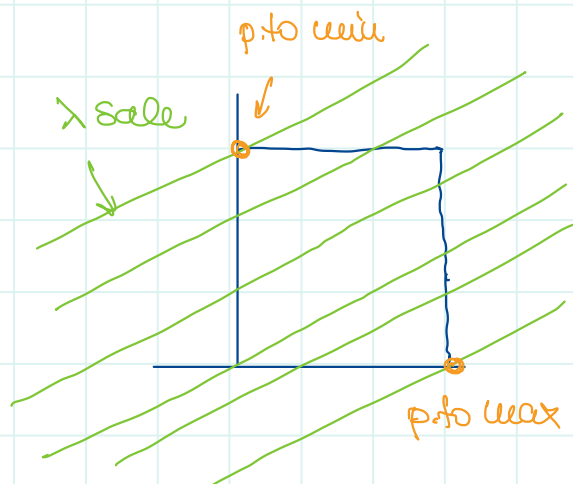
- ②  $x - 2y \geq 0 - 2 = -2$  con  $=$  se e solo se  $x=0$  e  $y=1$ .

Quindi  $-2$  è il min e  $(0,1)$  è il p.to di min

In alternativa potevamo tracciare le linee di livello

$$f(x,y) = \lambda, \quad x - 2y = \lambda$$

$$2y = x - \lambda, \quad y = \frac{1}{2}x - \frac{\lambda}{2}$$



Esempio 2  $A = [0, 2] \times [-1, 3] \times [0, 1]$  (parallelepipedo in  $\mathbb{R}^3$ )

$$f(x, y, z) = 2x + 3y - 5z$$

Max:  $f(x, y, z) \leq 4 + 9 - 0 = 13$  p.to max:  $(2, 3, 0)$

Min:  $f(x, y, z) \geq 0 - 3 - 5 = -8$  p.to min:  $(0, -1, 1)$

$$g(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^3$$

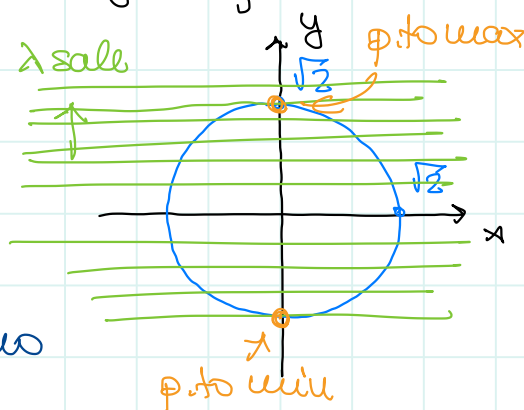
Max:  $g(x, y, z) \leq 4 - 0 + 1 = 5$  p.to max:  $(2, 0, 1)$

Min:  $g(x, y, z) \geq 0 - 9 + 0 = -9$  p.to min:  $(0, 3, 0)$

Esempio 3  $f(x, y) = y$   $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

Max =  $\sqrt{2}$  p.to di max:  $(0, \sqrt{2})$

Min =  $-\sqrt{2}$  p.to di min:  $(0, -\sqrt{2})$

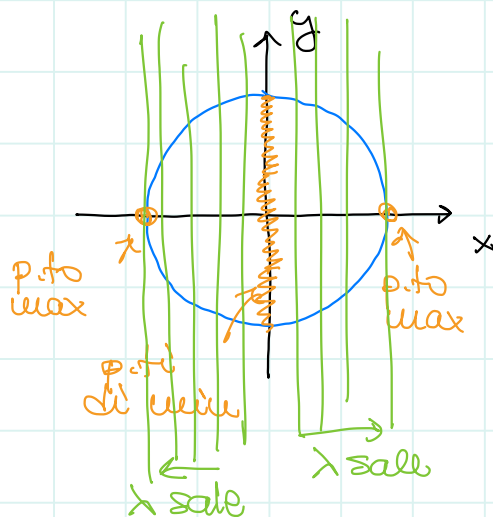


Ulteriore conferma: le linee di livello sono  
le rette // all'asse  $x$

$$g(x, y) = x^2$$

Max = 2 p.to di max:  $(\pm\sqrt{2}, 0)$

Min = 0 p.to di min: infiniti punti  
dell'asse  $y$  che stanno in  $A$



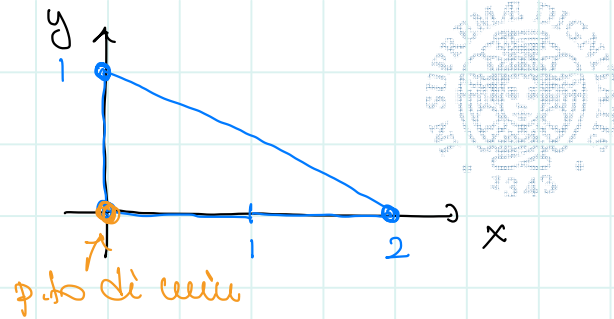
Per controllo: le linee di livello

$$x^2 = \lambda \leadsto x = \pm\sqrt{\lambda}$$

Esempio 4

$$f(x,y) = x+y$$

$A =$  triangolo con vertici  
in  $(0,0), (2,0), (0,1)$



Per  $W$ ,  $\max$  e  $\min$ , esistono

$$\min f(x,y) \geq 0+0=0 \quad \text{p.to di min: } (0,0)$$

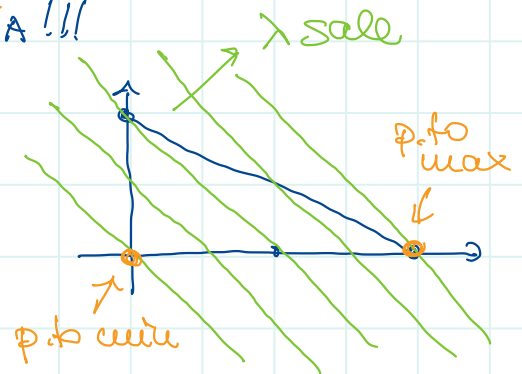
$$\max f(x,y) \leq 2+1=3$$

vero, ma non posso realizzare  
l'uguale !! Infatti dovrai prendere  
 $x=2$  e  $y=1$ , ma  $(2,1) \notin A$ .

Quindi 3 NON è il max.

CON LE DISUGUAGLIANZE NON SI ARRIVA!!!

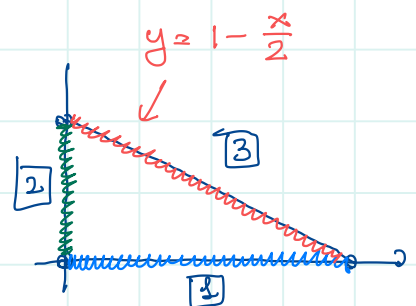
Usiamo le linee di livello:  $x+y=\lambda$   
 $y=\lambda-x$



Max: 2 p.to di max:  $(2,0)$ .

Alternativa: usare la procedura completa

- ① Stazionari interni  $\nabla f(x,y) = (1,1)$  non si annulla mai:  $\emptyset$
- ② Singolari interni:  $\emptyset$
- ③ Bordo: fatto da 3 pezzi  
Parametrizzo i 3 pezzi

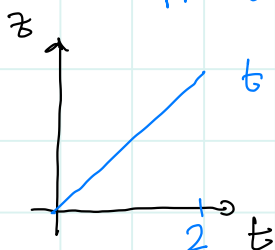


①  $(t,0)$  con  $0 \leq t \leq 2$

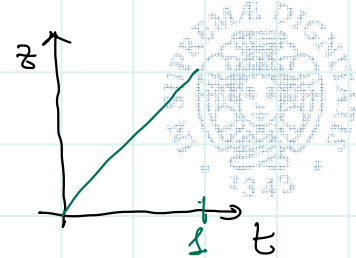
Sostituisco in  $f$  e trovo

$$\varphi_1(t) = f(t,0) = t$$

(allora a cui si trova un  
estremo che percorre il tratto ①)

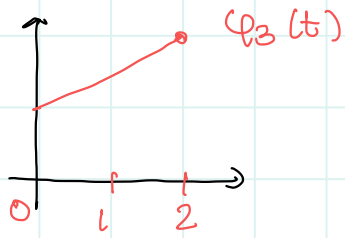


2  $(0, t)$  con  $0 \leq t \leq 1$   $\varphi_2(t) = f(0, t) = t$



3  $(t, 1 - \frac{t}{2})$  con  $0 \leq t \leq 2$

$$\varphi_3(t) = f(t, 1 - \frac{t}{2}) = t + 1 - \frac{t}{2} = 1 + \frac{t}{2}$$



Nota: su tutti e 3 i tratti del bordo, max e min stanno agli estremi, quindi i 3 candidati da sostituire sono i 3 vertici del triangolo

$\rightarrow f(0,0) = 0 \leftarrow \text{min}$

$\rightarrow f(2,0) = 2 \leftarrow \text{max}$

$\rightarrow f(0,1) = 1$