

MAX-MIN per funzioni di più variabili

Analisi 1 Setting: data $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, trovare

$$\max_{\min} \{ f(x) : x \in [a, b] \} \leftarrow \text{sono dei "valori", cioè "delle y"}$$

da non confondere con i p.ti di max/min $\leftarrow$ sono "delle x"

Teorema (WEIERSTRASS) Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua
 è importante avere gli estremi

allora max e min esistono.

E come / dove li trovo? I candidati p.ti di max/min rientrano in una delle seguenti 3 categorie

- ① p.ti stazionari interni, cioè i p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 senza estremi
- ② p.ti singolari interni, cioè i p.ti $x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0)$ non esiste
- ③ p.ti di bordo cioè $x_0 = a$ e $x_0 = b$.

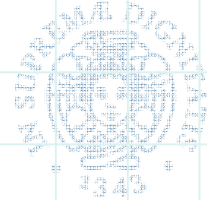
Operativamente

- $\rightarrow$ determino i p.ti delle 3 categorie, avendo così i candidati
- $\rightarrow$ li sostituisco tutti nella funzione e scopro dove vale di più o di meno.

Oss. Il problema diventa più complicato se invece di $[a, b]$ ho insiemi più complicati, magari non limitati

— o — o —

- Road map :
- insiemi COMPATTI
 - teo. Weierstrass
 - metodi per trattare il bordo



Def. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un sottoinsieme, o più in generale $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Si dice che A è limitato se esiste $R > 0$ tale che

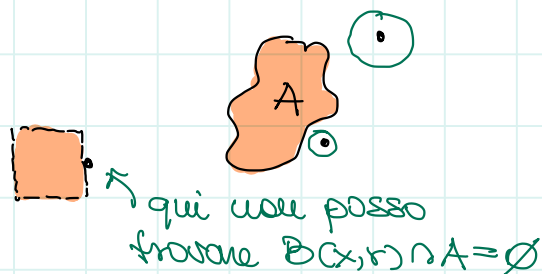
$$A \subseteq B(0, R)$$

(brutalmente: A è contenuto in una palla con centro nell'origine e raggio opportuno)

- si dice che A è chiuso se (brutalmente: contiene tutto il suo bordo) per ogni $x \notin A$ esiste $r > 0$ t.c.

$$B(x, r) \cap A = \emptyset$$

- si dice che A è COMPATTO se è contemporaneamente chiuso e limitato.

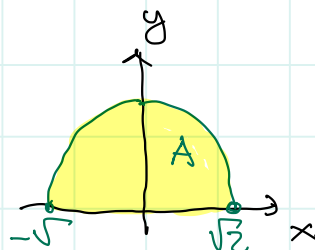


Idea brutale Gli insiemi compatti giocano in $\mathbb{R}^n$ lo stesso ruolo che giocavano in $\mathbb{R}$ gli intervalli con estremi.

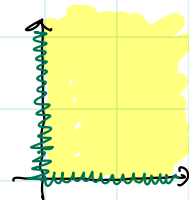
Esempi in $\mathbb{R}^2$

- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{x^2 + y^2 \leq 2}_{\text{dentro il cerchio}}, \underbrace{y \geq 0}_{\text{sopra asse } x}\}$ è compatto

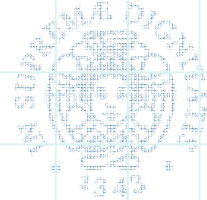
A contiene il suo bordo perché nelle condizioni è compreso l'uguale



- $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\} =$ primo quadrante
 → è chiuso
 → NON è limitato e quindi NON è compatto.



Teorema (Weierstrass) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.



Supponiamo che

- (i) f è continua
- (ii) A è compatto.

Allora esistono per forza

$$\max_{\text{min}} \{ f(x) : x \in A \} \leftarrow \begin{array}{l} \text{sono dei numeri, in } \mathbb{R}^2 \\ \text{avrebbero delle } z \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
vettori

Achtung! Il te. è una condizione SUFFICIENTE ma non necessaria. Se una delle hp, o entrambe, non sono verificate, max e min possono esistere comunque.

Dove cerco i p.ti di max/min? Nelle seguenti 3 categorie

- ① p.ti STAZIONARI INTERNI cioè p.ti x_0 interni all'insieme A , quindi non sul bordo, dove $\nabla f(x_0) = 0$ $\leftarrow$ sistema di n equ. in n incognite
- ② p.ti SINGOLARI INTERNI cioè p.ti x_0 interni ad A , dove f è non differenziabile (speriamo che non ci siano)
- ③ p.ti del BORDO di A (che saranno in numero infinito).

Operativamente: si calcolano i candidati delle 3 categorie e poi si sostituiscono in f per vedere dove vale di più o di meno.

Precisazione $\rightarrow x_0$ si dice interno ad A se esiste $r > 0$ t.c.

$$B(x_0, r) \subseteq A$$

$\rightarrow x_0$ si dice sul bordo di A se per ogni $r > 0$ la palla

$B(x_0, r)$ interseca sia A , sia il complementare di A



Perché i p.ti di max / min stanno in una delle 3 categorie?



→ se stanno sul bordo, bene

→ se sono interni e $\nabla f(x_0)$ non esiste, bene

→ resta il caso in cui x_0 è INTERNO ad A e $\nabla f(x_0)$ esiste.

In questo caso devo dimostrare che $\nabla f(x_0) = 0$.

Usiamo gli omini. Considero l'omino

$$x_0 + t e_k$$

↑ k -esimo vettore
base canonica



Consideriamo

$t \rightarrow f(x_0 + t e_k)$ = quota a cui si trova l'omino
che percorre la retta

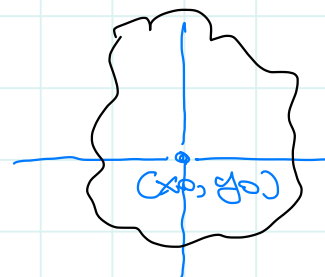
Se x_0 era un p.to di max / min per f , allora $t=0$ è un
p.to di max / min per questa funzione, quindi per Analisi 1
la derivata di questa funzione si annulla per $t=0$.

Ma la derivata di questa funzione è proprio $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x_0)$.

Quindi in x_0 si annullano tutte le
derivate parziali, e quindi il gradiente.

— o — o —

Oss. Dove abbiamo usato che x_0 è interno ad
 A ?



Lo abbiamo usato perché abbiamo bisogno
di poterci muovere da x_0 in tutte le direzioni

— o — o —