



In pratica:  $\rightarrow$  come stabilisco se  $f$  è differenziabile? ①  
 $\rightarrow$  come calcolo le derivate parziali? ②  
 $\rightarrow$  " " " " " direzionali? ③

Risposta ③: se so che  $f$  è diff. in  $x_0$ , uso formula  $\langle \nabla f(x_0), v \rangle$   
 altrimenti occorre usare la definizione

Risposta alla ②: dove non ci sono problemi, uso le regole di derivazione come ad Analisi 1.  
 Altrimenti uso la definizione.

Risposta alla ①: o uso la definizione o spero nel seguente teo.

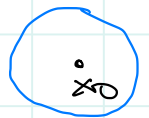
### TEOREMA DEL DIFFERENZIALE TOTALE

Supponiamo che tutte le derivate parziali

$\rightarrow$  esistano in tutta una pallina centrata in  $x_0$

$\rightarrow$  siano continue in  $x_0$ .

Allora  $f$  è differenziabile in  $x_0$ .



### Esempi di calcolo di derivate parziali

$$f(x, y) = 3x + y^2$$

$$f_x(x, y) = 3$$

$$f_y(x, y) = 2y$$

[faccio finta che  
 l'altra variabile sia  
 costante]

$$f(x, y) = xy + x^2y^3$$

$$f_x(x, y) = y + y^3 \cdot 2x = y + 2xy^3$$

$$f_y(x, y) = x + x^2 \cdot 3y^2 = x + 3x^2y^2$$

$$f(x, y) = x \cos y$$

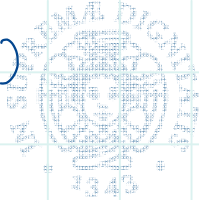
$$f_x(x, y) = \cos y$$

$$f_y(x, y) = x(-\sin y) = -x \sin y$$

$$f(x,y) = x \sin(xy)$$

$$f_x(x,y) = \sin(xy) + xy \cos(xy)$$

$$f_y(x,y) = x^2 \cos(xy)$$



$$f(x,y,z) = e^{xz} \log(xy)$$

$$f_x(x,y,z) = z e^{xz} \log(xy) + e^{xz} \frac{1}{x}$$

$$f_y(x,y,z) = e^{xz} \cdot \frac{1}{y}$$

$$f_z(x,y,z) = x e^{xz} \log(xy)$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y^3}$$

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{y^3}$$

$$f_y(x,y) = -3x^2 \frac{1}{y^4}$$

$$f(x,y) = x^y$$

$$f_x(x,y) = y \cdot x^{y-1}$$

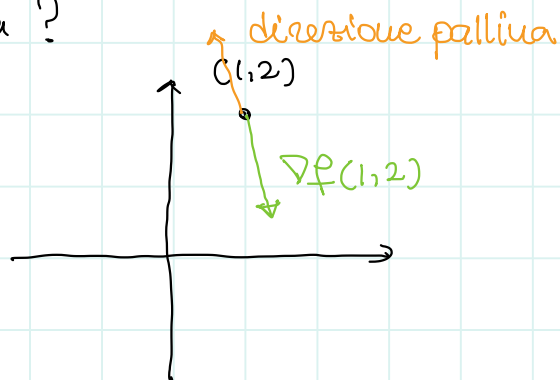
$$f_y(x,y) = x^y \cdot \log x$$

Oss. Dove non ci sono problemi, tutte le funzioni precedenti sono differenziabili.

**Esempio della pallina** Consideriamo  $f(x,y) = x^2 - y^3 + 3y$  e mettiamo una pallina nel p.to del grafico sopra (1,2). In che direzione si muoverà la pallina?

$$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2 + 3)$$

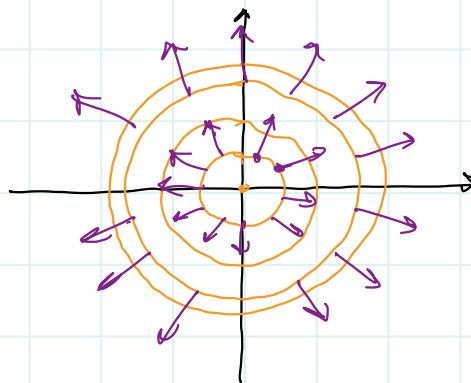
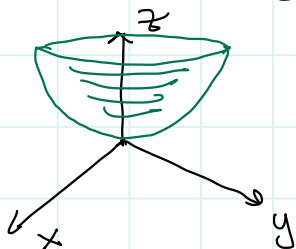
$$\nabla f(1,2) = (2, -9)$$



**Oss. geometrica** Il gradiente è sempre  $\perp$  alle linee di livello

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

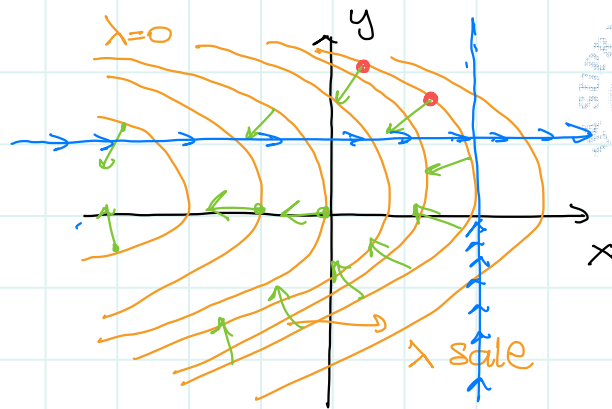
$$\nabla f = (2x, 2y)$$



$$f(x,y) = x + y^2$$

Linee di livello:  $x + y^2 = \lambda$   
 $x = \lambda - y^2$

$$\nabla f(x,y) = (1, 2y)$$



$\rightarrow$  = direzione pendenza  
 $(= -\nabla f(x_0))$

Percorso di ottimizzazione: Gli ottimi a  $y$  fisso si muovono su rette  
 " " "  $x$  fisso " su parabole

