

Teorema Supponiamo che $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sia diff. in x_0 .

Allora valgono i seguenti fatti

- (1) f è continua in x_0 ,
- (2) esistono le derivate parziali e sono le componenti di α (quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$)
- (3) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$$

Nota bene: (2) è un caso speciale di (3).

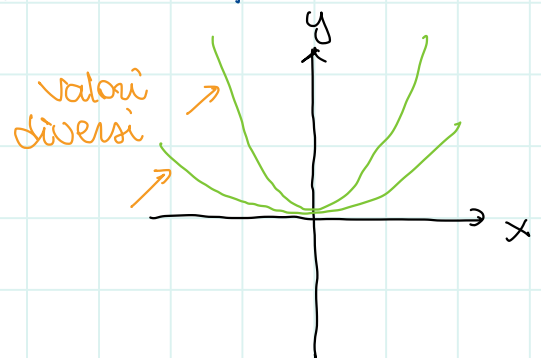
Brutta notizia Può succedere che in x_0 esistano tutte le derivate direzionali MA f non sia nemmeno continua in x_0 .

L'ESEMPIO

$$f(x, y) = \begin{cases} \left(\frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifichiamo che f NON è continua in $(0, 0)$ Andiamo sulle parabole prendendo (t, mt^2) :

$$f(t, mt^2) = \left(\frac{mt^4}{t^4 + m^2 t^4} \right)^2 = \frac{m^2}{(1 + m^2)^2} \quad \text{che dipende da } m!$$



Calcolo della derivata direzionale in $(0,0)$ con direzione $v = (\alpha, \beta)$

Devo fare

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(\alpha, \beta) - f(0,0)}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha^2 \beta \alpha^3}{\alpha^4 \alpha^4 + \beta^2 \alpha^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\alpha} = 0$$
$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^4 \beta^2 \alpha^6}{\beta^4 \alpha^4 + o(\alpha^4)} \cdot \frac{1}{\alpha} = 0$$

Quindi tutte le derivate direzionali sono nulle.

Dimostriamo che f diff. in $x_0 \Rightarrow$ esistono derivate direzionali e vale la formula

Ipotesi: $f(x_0 + \alpha) = f(x_0) + \langle \alpha, v \rangle + o(\|\alpha\|)$ per $\alpha \rightarrow 0$

Tesi

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \langle \alpha, v \rangle$$

Dall'ipotesi segue che

$$f(x_0 + \overbrace{tv}^{\alpha}) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, tv \rangle}_{t \langle \alpha, v \rangle} + \underbrace{o(\|tv\|)}_{o(|t| \cdot \|v\|)}$$

da cui

$$\frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} = \frac{t \langle \alpha, v \rangle + o(|t| \cdot \|v\|)}{t}$$
$$= \langle \alpha, v \rangle + \frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{t}$$

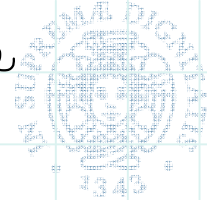
Resta solo da dimostrare che l'ultimo pezzo tende a 0.

$$\frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{t} = \frac{o(|t| \cdot \|v\|)}{|t| \cdot \|v\|} \cdot \frac{|t| \cdot \|v\|}{t}$$

↓
0
per def. di o piccolo
— 0 — 0 —

Limitato $= \pm \|v\|$ a seconda del segno di t

La stessa formula ci dice che le componenti di α sono le derivate parziali.



Significato geometrico del gradiente e piano tangente

Domanda: fissato x_0 , qual è il vettore v con $\|v\|=1$ per cui la derivata direzionale è max/min?

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = \underbrace{\|\nabla f(x_0)\|}_{\text{Fisso}} \cdot \underbrace{\|v\|}_1 \cdot \underbrace{\cos \theta}_{\text{angolo compreso}}$$

questa è max quando $\cos \theta = 1$, cioè $\theta = 0$, cioè v ha la stessa direzione di $\nabla f(x_0)$.

Analogamente, è min quando $\cos \theta = -1$, cioè $\theta = 180^\circ$, cioè v e $\nabla f(x_0)$ hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Quindi un cuervo che si trova in (x_0, y_0)

- sale al max se va nella direzione data da $\nabla f(x_0, y_0)$
- scende " " " " $-\nabla f(x_0, y_0)$

PIANO TANGENTE

Analisi 1

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

e.g. retta tangente
(passa per $(x_0, f(x_0))$ e ha coeff. angolare $f'(x_0)$)

Analisi 2

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0) + f_x(x_0, y_0)h + f_y(x_0, y_0)k + o(\dots)$$

$$= f(x_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Equazione piano tangente

+ o(---)

In n variabili l'equazione del "iperpiano tangente" è del tipo

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

BRUTALMENTE Dove ad Analisi 1 c'erano le derivate, ora ad Analisi 2 c'è il gradiente.

Dove pensiamo al gradiente?

→ geometricamente sono i coeff. del piano tangente scritto come $z = \text{qualcosa}$

→ "dinamicamente" = direzione in cui si sale o scende di più sul grafico.

